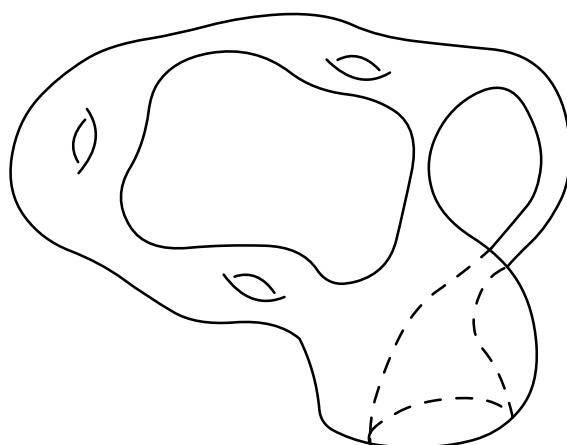


欧拉公式与闭曲面分类



2012 数学之星讲义

北京大学数学科学学院

王长平

用直观来感受数学之美

拓扑学是十九世纪几何学发展的结晶，并在二十世纪得到了飞速的发展。如今，拓扑学已是数学的一个重要分支，它的研究成果不但对数学其它分支的发展产生了深刻的影响，还在物理、化学和生物等学科上有许多重要的应用。

粗略地说，拓扑学研究几何图形（如曲线、曲面）在弯曲、形变下不变的性质。由于这些不变的性质与长度、角度等度量性质没有直接的关联，对它们的研究需要更为丰富的数学思想。

在这本小册子中，我们试图用直观的语言来讲授拓扑学中最初的知识，其中包括多面体的欧拉公式、曲面的拓扑学等问题。这些知识最初来源于著名数学家欧拉在十八世纪的研究工作。我们希望和读者来一起来学习、探索和理解其中的数学思想和方法，并用我们的直观来感受数学之美。

在本书中，我们尽可能应用直观的描述来替代一些抽象的数学定义和论证，以避免造成阅读的困难。同时，我们从一些参考书上摘录了部分好的图片，以增强直观的效果。

最后，我们希望数学之星夏令营获得圆满成功。

目录：

第一章 欧拉公式及其证明

- 1 凸多面体的欧拉公式
- 2 欧拉公式的拓扑证明
- 3 正多面形的分类
- 4 著名数学家欧拉

第二章 曲面的拓扑学

- 1 曲面的直观定义
- 2 曲面的多边形表示
- 3 曲面的三角剖分
- 4 闭曲面的分类
- 5 曲面的拓扑学历史简介

第一章 欧拉公式及其证明

§1 凸多面体的欧拉公式

空间中由若干个平面多边形围成的立体图形称为 **多面体**。一个多面体的表面称为一个 **多面形**。

设 \mathbb{P} 是一个多面形。记 \mathbb{P} 的顶点个数为 V ，棱的个数为 E ，面的个数为 F 。在这一节中，我们一起来探索 V 、 E 和 F 这三个正整数之间的本质联系。

为了进行研究，我们需要收集一些多面形作为样品。这些样品应该包含多面形的各种类型。

首先，我们找到一类最常见的多面形，它上面任意两点的连接线段包含在多面体中。我们将这样的多面形称为 **凸多面形**。

我们在图 I-1 中给出六个凸多面形的例子。

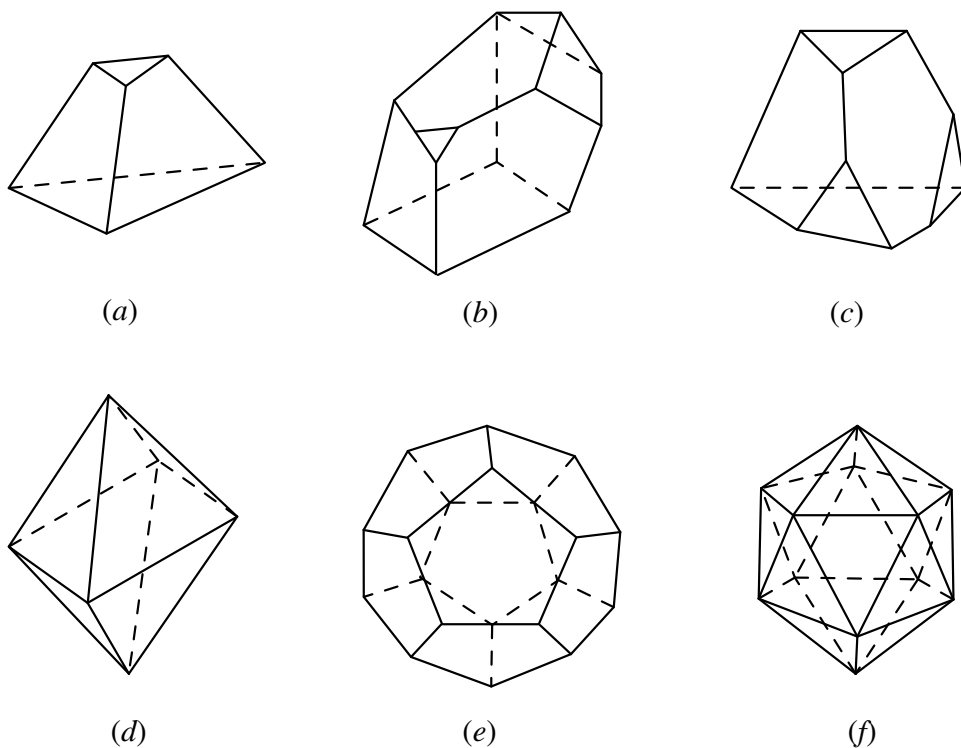


图 I-1

对这六个凸多面形分别计算它们的 V 、 E 和 F ，我们得到以下的统计表：

凸多面形统计表

多面形	顶点数 V	棱数 E	面数 F	规律?
I-1-a	6	9	5	
I-1-b	13	20	9	
I-1-c	10	15	7	
I-1-d	6	12	8	
I-1-e	20	30	12	
I-1-f	12	30	20	

从 V 、 E 和 F 的统计数据容易发现，对于所有这些例子，总成立关系式

$$V - E + F = 2.$$

著名数学家欧拉在 1750 年就指出这个公式对所有凸多面形均成立，并随后给出证明。虽然据考证，这个公式在欧拉之前就已被发现，但欧拉的论文引起了许多数学家的关注。所以人们仍称它为欧拉公式。

在下节中，我们将给出欧拉公式的一个拓扑证明。

请读者在统计表的规律那一栏填上 $(V - E + F)$ ，并将正整数 2 补充到统计表的最后一列。

下一步，我们需要探索的问题是：欧拉公式是否对其它类型的多面形也成立？

为了进一步的研究，我们找到图 I-2 中的六个非凸多面形。其中，多面形 I-2-c 是在正三角柱上挖去一个三角柱体的小洞而获得的；多面形 I-2-d 和多面形 I-2-e 是在立方体上挖去一个长方体的小洞而得到的，前者在上下两面各增加了四条棱；多面形 I-2-f 是在立方体中央挖去一个小的立方体而得到的。

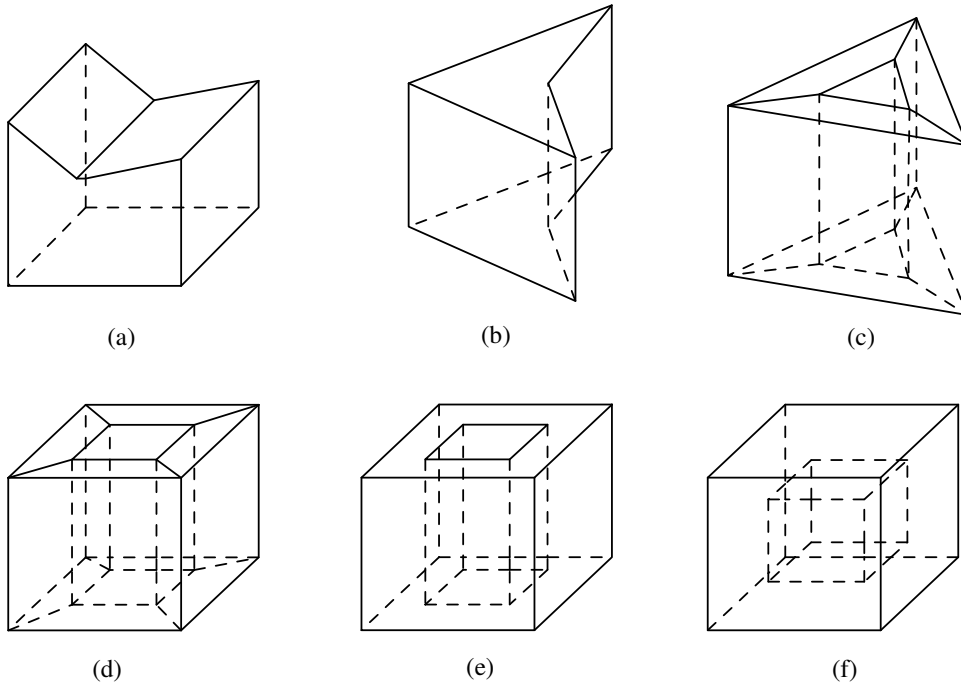


图 I-2

我们将组合数 $(V - E + F)$ 纳入统计表的栏目，并对这六个非凸多面形进行计算，得到以下统计表

非凸多面形统计表

多面形	顶点数 V	棱数 E	面数 F	$V - E + F$
I-2-a	10	15	7	2
I-2-b	8	12	6	2
I-2-c	12	24	12	0
I-2-d	16	32	16	0
I-2-e	16	24	10	2
I-2-f	16	24	12	4

从统计表看，虽然 I-2-d 和 I-2-e 中的这两个多面形从外形上是一样的，但 $(V - E + F)$ 不一样。

通过仔细观察，我们发现问题：I-2-e 中的上下两个面不是通常的多边形，而是从一个四边形中挖去一个四边形，是一个带洞的多边形。

所以，如果我们要求多面形的每个面是平面上一个通常的、不带洞的多边形，则 I-2-e 将被排除在多面形之外。

另一方面，I-2-f 也是一个奇怪的多面形，它的表面是两个互不相通的正六面形。

所以，如果我们还要求多面形必须是连通的，则 I-2-f 这一类奇怪的多面形也被排除在多面形之外。

除此之外，我们再没有毛病可挑了。

我们感到奇怪的是，对非凸多面形 I-2-a 和 I-2-b 来说，它们的组合数 $(V - E + F)$ 也是 2。那么，这两个多面形有什么特性，它与凸多面形是相同的，而与多面形 I-2-c 和多面形 I-2-d 是不同的？

答案就在这。我们想象这些多面形是由橡皮制作的。如果我们对每个多面形强行打气，让它们鼓起来，则非凸多面形 I-2-a 和 I-2-b 与凸多面形一样，是一个球。而且，非凸多面形 I-2-c 和 I-2-d 也是一样的，是一个环面（轮胎面）。

因此，我们有以下更为大胆的猜测：

拓扑欧拉定理： 如果一个多面形可以在空间中形变成一个球面，则必有公式

$$V - E + F = 2.$$

这个定理显然比凸多面形的欧拉定理适应面更广。每个凸多面形显然可以在空间中形变成一个球面，所以公式 $V - E + F = 2$ 成立。

在下一节中，我们将给出这个定理的证明。

从多面形 I-2-c 和 I-2-d 的共同性质，我们可以进一步猜测以下的定理成立：

定理： 如果一个多面形可以在空间中形变成一个环面，则必有公式

$$V - E + F = 0.$$

设 \mathbb{P} 是一个多面形。我们称组合数

$$\chi(\mathbb{P}) = V - E + F$$

为多面形 \mathbb{P} 的欧拉数。

多面形的欧拉数有非常好的性质。

如果我们在多面形的一条棱上增加一个顶点，则这条棱变成两条棱。对多面形来说，增加了一个顶点和一条棱，它的欧拉数保持不变。

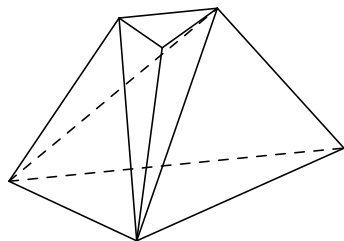


图 I-3

如果我们连接一个面的两个顶点，将这个面分成两个面。则对多面形来说，增加了一条棱和一个面，而它的欧拉数依然不变。

我们可以用对角线将所有多边形分割成三角形，并保持多面形的欧拉数不变（参见图 I-3）。多面形欧拉数的这个特性称为剖分不变性。

思考题 I-1

1. 拿两个同样大小的多面形 I-2-d，分左右两边放好。去掉左边多面形的右侧面，以及右边多面形的左侧面，然后将这两个多面形合并成一个多面形 \mathbb{P}_2 。证明：多面形 \mathbb{P}_2 的欧拉数为 -2 。
2. 请利用上述同样的制作方法，制作一系列多面形 \mathbb{P}_g ，它的欧拉数为 $(2 - 2g)$ ，其中 $g = 2, 3, 4, \dots$ 。
3. 想象多面形是由橡皮制作的。问： \mathbb{P}_g 可以在空间中形变成何种曲面？请对 $g = 5$ 画出这个曲面的形状。

§2 欧拉公式的拓扑证明

这一节中，我们给出拓扑欧拉定理的一个简短证明。

设 \mathbb{P} 是多面形。我们用 V 、 E 和 F 来分别表示 \mathbb{P} 的顶点、棱和面的个数，并定义 \mathbb{P} 的欧拉数为

$$\chi(\mathbb{P}) = V - E + F.$$

如果 \mathbb{P} 的一个面不是三角形，我们连接它的两个顶点，将这个面分割成两个面。这个手术增加一条棱和一个面，而欧拉数不变。重复这样的

手术，我们可以将多面形 \mathbb{P} 的所有面均分割成三角形，而保持欧拉数不变。

所以，我们可不妨假定，多面形 \mathbb{P} 的所有面均为三角形。

我们假设多面形 \mathbb{P} 是由橡皮制成的，它可以在空间中形变成一个球面。

形变后 \mathbb{P} 的顶点和棱构成球面上的一张地图， \mathbb{P} 上的面变成球面上曲边的三角形。这个球面地图的顶点、棱和面 1-1 对应于多面形 \mathbb{P} 上的顶点、棱和面，它们的个数分别是 V 、 E 和 F 。

我们在球面地图上去掉一个面（三角形），成为有一个洞的球面。由于这个带洞的球面是橡皮制成的，我们可以将它平铺在平面上，形成平面上的一个以三角形为边界的一张平面地图（参见图 I-4）。这张平面地图中有 V 个顶点， E 条棱和 $(F-1)$ 个面，它的欧拉数为 $(V-E+F-1)$ 。

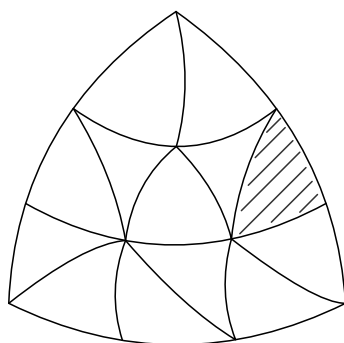


图 I-4

我们从这张平面地图中每次拿走一个含有边界的三角形。如果拿走的三角形只有一个边在地图的边界上，则我们从地图上去掉了一条棱和一个面，余下的地图的欧拉数还是 $(V-E+F-1)$ 。

如果拿走的三角形有两条边在地图的边界上，则我们从地图上去掉了一个顶点，两条棱和一个面，余下的地图的欧拉数还是 $(V-E+F-1)$ 。

经过有限次后，地图只剩下一个三角形，它的欧拉数还是 $(V-E+F-1)$ 。一个三角形有三个顶点，三条棱和一个面，它的欧拉数为 1。所以，我们得到 $V-E+F-1=1$ 。这样，我们证明了以下的

拓扑欧拉定理：如果一个多面形可以形变成球面，则它的欧拉数为 2。

每个凸多面形的表面可以形变成一个球面，所以欧拉公式成立。图 I-2-a 和图 I-2-b 中的多面形虽然是非凸的，但它们的表面可以形变成一个球面，所以它的欧拉数也是 2。

思考题 I-2

平面上由若干个点和连接这些点的若干条弧构成的图形称为一个图。如果这个平面图形是连通的，我们就称这个图为连通图。一个连通图称为一个树，如果图中没有任何一个由若干条弧构成的圈。

1. 设 Γ 是一个连通图，我们记 V 为它的顶点个数，记 E 为它的弧的个数。试用归纳法证明：如果 Γ 是一个树，则有 $V - E = 1$ 。
2. 设 Γ 是一个连通图。试证明：不等式 $V - E \leq 1$ 成立，且等式成立，当且仅当 Γ 是一个树。
3. 试证明：在一个连通图中，总可以找到一个树，它包含有图的所有顶点。

§3 正多面形的分类

我们常在生活中遇到以下高度对称的多面形，它们是正四面形、正六面形、正八面形、正十二面形和正二十面形（参见图 I-5）。

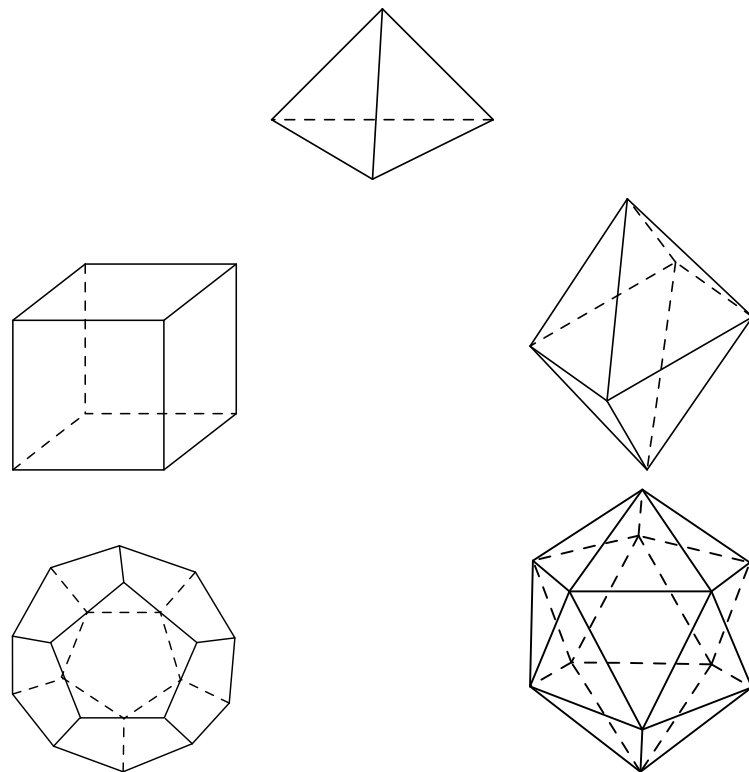


图 I-5

这些正多面形有如下的性质：

- (i) 它的每个面有相同边数的正多边形；
- (ii) 它的每个顶点出发的棱的个数相同；
- (iii) 它的所有顶点落在同一个球面上。

正多面形的每个面是一个正多边形。我们称每个正多边形的外接圆圆心为正多边形的重心。正多面形每个面的重心连线又构成一个正多面形，称为它的对偶正多面形。

于是，正四面形是自对偶的；正六面形的对偶是正八面形；而正十二面形的对偶是正二十面形。

我们所生活的空间非常匀称。空间中的任意两点、两直线或两平面均拥有平等的地位。

给定一条空间直线 l 和一个角度 θ ，我们可以确定空间的一个旋转变换，它以 l 为旋转轴，将空间中的每一点绕旋转轴 l 旋转 θ 角。特别当 $\theta = 0$ 时，旋转变换为恒同变换，称为平凡的旋转。

如果存在一个非平凡的旋转变换，它将空间中的一个图形 Γ 变成它自己，我们就称 Γ 是旋转对称的，并称这样的旋转变换为图形 Γ 的一个 **旋转对称**。直观地说，一个图形的不同旋转对称的个数越多，则这个图形越对称。

球面在空间中可以说是无穷对称的。每个以过球心的直线为轴、以任意角度为旋转角的旋转变换均将球面变成它自己。

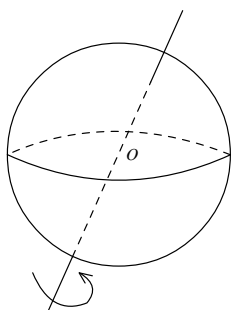


图 I-6

正四面形可以以每个顶点与其对面重心的连线为轴旋转 120° 和 240° ，而将正四面形变成自己。这样的旋转对称有 8 个。也可以以每对对边的中点连线为轴旋转 180° ，而将正四面形变成自己。这样的旋转对称有 3 个。所以，正四面形共有 11 个不同的旋转对称（参见图 I-7）。

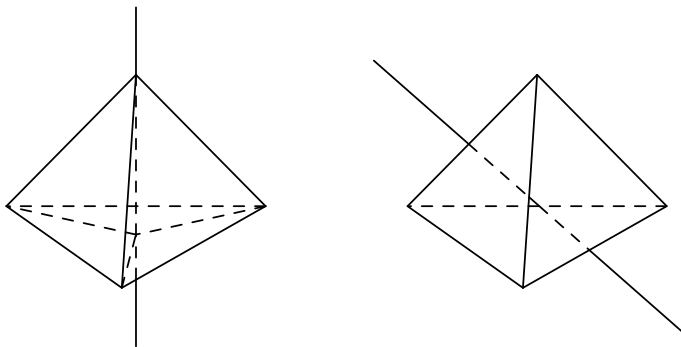


图 I-7

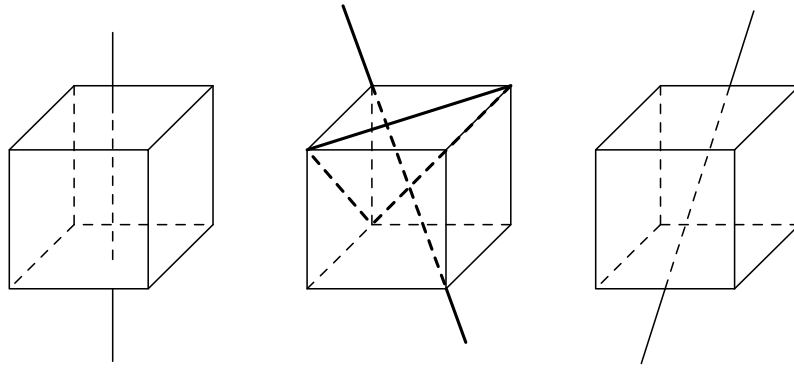


图 I-8

正六面形可以以每对对面的重心连线为轴，旋转 90° 、 180° 和 270° ，而将正六面形变成自己。这样的旋转对称有 9 个。也可以以每对对顶点为轴旋转 120° 和 240° ，而将正六面形变成自己。这样的旋转对称有 8 个。还可以以每对对棱的中点连线为轴，旋转 180° ，而将正六面形变成自己。这样的旋转对称有 6 个。所以，正六面体共有 23 个不同的旋转对称（参见图 I-8）。

正八面形和正六面形是相互对偶的。由于旋转对称将正多面形每个面的重心映成另一个面的重心，所以正八面形的旋转对称与正六面形的旋转对称相同，它共有 23 个不同的旋转对称。

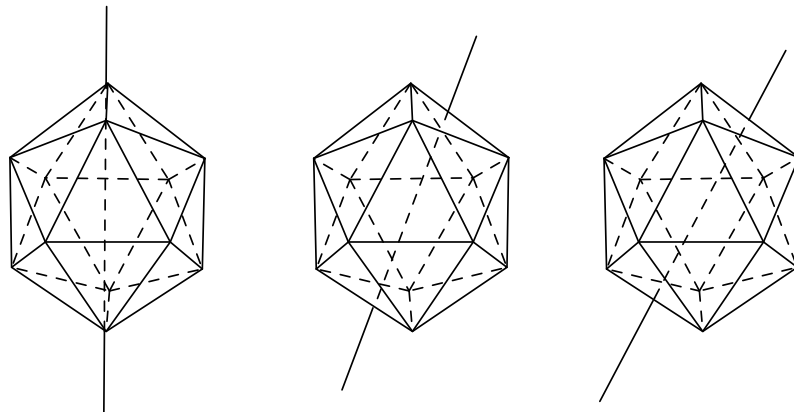


图 I-9

正二十面形有 20 个面，30 条棱和 12 个顶点。它可以以每对对顶点的连线为轴旋转 72° 、 144° 、 216° 和 288° ，而将正二十面形变成自己。这样的旋转对称有 24 个。也可以以每对对面的重心连线为轴旋转 120° 和 240° ，而将正二十面形变成自己。这样的旋转对称有 20 个。还

可以以每对对边的中点连线为轴旋转 180° ，而保持自己不变。这样的旋转对称有 15 个。所以，正二十面形共有 59 个不同的旋转对称（参见图 I-9）。

正十二面形和正二十面形是相互对偶的。所以，它共有 59 个不同的旋转对称。

设 \mathbb{P} 是一个正多面形。我们用 m 来表示正多边形的边数，用 n 来表示从顶点出发的棱的条数。

从图 I-5 可见， (m, n) 可以取到以下的数值： $(3, 3)$ ， $(4, 3)$ ， $(3, 4)$ ， $(5, 3)$ 和 $(3, 5)$ 。

下面我们应用欧拉公式来证明： (m, n) 只能取以上的五个数值。

我们记正多面形 \mathbb{P} 的顶点、棱和面的个数分别为 V 、 E 和 F 。

因为每个面有 m 个边，所以 F 个面共有 mF 条边。但每条边恰是两个相邻面的公共边，故在这 mF 条边的计数过程中将多面形的每条棱算了两次。于是有等式 $mF = 2E$ 。

又由于从每个顶点出发有 n 条棱，所以 V 个顶点出发的棱的条数为 nV 。但在这个计数过程中多面形的每条棱算了两次，所以又有 $nV = 2E$ 。

由欧拉公式，我们有

$$V - E + F = \left(\frac{m}{n} - \frac{m}{2} + 1\right)F = 2.$$

由此推出

$$2m + 2n - mn = \frac{4n}{F} > 0.$$

这样便有

$$(m - 2)(n - 2) < 4.$$

由 m 和 n 的几何意义，必须 $m \geq 3$ 和 $n \geq 3$ 。这样，不等式推出 (m, n) 只能取已知的那五种数值。

这样，我们证明了以下的

正多面形分类定理：正多面形只有正四面形、正六面形、正八面形、正十二面形和正二十面形这五种类型。

思考题 I-3

1. 每张平面定义了空间的一个镜面对称, 它将一点对应到它关于这张平面的对称点。试确定每种正多面形的所有不同的镜面对称的个数, 它将正多面形变成自己。

2. 设 \mathbb{P} 是一个凸多面形, A 为 \mathbb{P} 的一个顶点。记 $\theta(A)$ 为所有以 A 为顶点的面在 A 点处的角的总和 (以弧度计算)。我们定义多面形在 A 点处的曲率

$$K(A) = 2\pi - \theta(A).$$

显然, 曲率越大, $\theta(A)$ 越小, 顶点 A 越“尖”。问:

(i) 五种正多面形在顶点处的曲率各是多少?

(ii) 五种正多面形所有顶点处的曲率之和各是多少?

3. 设 \mathbb{P} 是一个凸多面形。证明: 它在所有顶点处的曲率之和为 4π 。

(提示: 不妨假设多面形的每个面均为三角形。应用欧拉公式。)

§5 著名数学家欧拉 (Leonhard Euler)

欧拉 (1707.4.15 - 1783.9.18) 是瑞士一个牧师的儿子。他 13 岁到巴塞尔大学学习数学。当时, 约翰·伯努利 (Johan Bernouli) 是该校的数学教授。欧拉非常喜欢伯努利教授讲授的数学和物理课程。由于对数学的共同爱好, 欧拉还和伯努利的两个儿子尼古拉·伯努利第二 (Nikolau Bernoulli II) 和丹尼·伯努利 (Daniel Bernoulli) 成为好朋友, 并一起成长为优秀的数学家。

欧拉 19 岁开始发表数学论文。1727 年, 欧拉应邀到俄国圣彼得堡科学院工作。欧拉在圣彼得堡科学院工作了 14 年, 他的研究工作涉及数学、力学和天文学等重要领域。1738 年, 一场疾病导致他右眼失明。1741 年, 欧拉应邀到柏林科学院工作, 担任数学部主任。在柏林的 25 年是欧拉研究成果最重要和最为丰富的时期, 他的研究工作遍布了数学、物理、力学、光学和电磁学等领域。1766 年, 欧拉回到圣彼得堡科学院。1771 年, 欧拉双目失明, 但他仍然进行科学研究工作, 并在助手的帮助下继续发表著作和学术论文, 直至 1783 年逝世。

欧拉是十八世纪最伟大的数学家之一。他的研究工作相当丰富, 生前共发表 560 余篇论文, 并著有《无穷分析引论》(共二卷), 《微分学原理》(共二卷) 和《积分学原理》(共三卷) 等传世著作, 对数学的发展产生了深远的影响。

下面我们列举几个与欧拉有关的初等数学问题。

1735 年, 欧拉用优美的方法解决了哥尼斯堡的七桥问题, 给出了判断一个图是否可以一笔画的欧拉判定定理。

1735 年, 欧拉证明: 当 n 越来越大时, 序列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

将越来越接近于常数 γ , 其中 $\gamma = 0.57721566 \cdots$ 。这个常数被称为欧拉常数。人们猜测, 欧拉常数 γ 是一个超越数, 即: 不存在以 γ 为根的整系数多项式。这个猜测至今未得到证明。

1750 年, 欧拉在给哥德巴赫的信中提到凸多面体的顶点个数 V , 棱的条数 E 和面的个数 F 满足 $V - E + F = 2$ 。如今我们将这个公式称为欧拉公式。

1753 年, 欧拉证明了费马大定理的最初部分, 即: 代数方程 $x^3 + y^3 = z^3$ 没有正整数解。一般情形下的费马大定理, 即: $x^n + y^n = z^n$ 对所有 $n > 2$ 没有正整数解, 是最著名的数学难题之一, 直到 1996 年才被完全证明。

1760年，欧拉定义函数 $\varphi(n)$ 为小于正整数 n 且与 n 互质的正整数的个数。欧拉证明：如果 m 与 n 互质，则 $m^{\varphi(n)} - 1$ 能够被 n 整除。这个定理被称为欧拉定理。函数 $\varphi(n)$ 在数论研究中很有用，被称为欧拉函数。

第二章 曲面的拓扑学

§1 曲面的直观定义

我们在生活中遇见的曲面可分成如下的两类。

一类是无边的曲面：如球面、环面和双环面（参见图 II-1）。

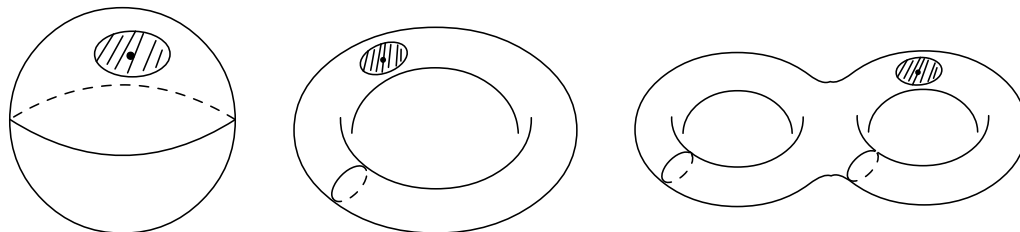


图 II-1

另一类是带边的曲面：如半球面、圆柱面和挖去若干个洞的环面（参见图 II-2）。

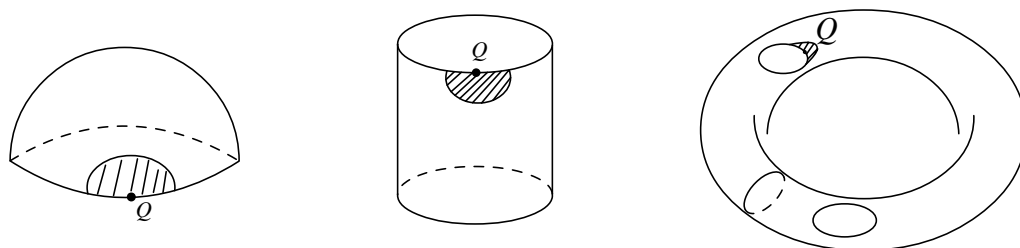


图 II-2

如果我们想象这些曲面是橡皮做成的，则这些面上的点有以下共同的特性：

- (i) 在每个非边界点 P 处均存在一个以 P 为中心的小球，使得落在小球内部的曲面小片可以在平面上铺成一个小圆盘；
- (ii) 在每个边界点 Q 处均存在一个以 Q 为中心的小球，使得落在小球内部的曲面小片可以在平面上铺成一个半圆盘，而 Q 点落在半圆盘的直径上。

如果一个图形，它上面的每一点均满足上述性质 (i) 或 (ii)，我们就称它为一张 **曲面**。曲面上满足性质 (i) 的点称为 **曲面的内点**，满足性质 (ii) 的点称为 **曲面的边界点**。不含边界点的曲面称为 **无边的曲面**。含有边界点的曲面称为 **带边的曲面**。

虽然以上只是曲面的直观定义，但它已使我们能够判断，哪些图形是无边的曲面；哪些图形是带边界的曲面；而哪些图形不是曲面。

下面我们利用曲面的上述定义来检验一些常见的图形，看看它们是否构成一张曲面。

图 II-3-a 中锥面是一个带边的曲面，它的底圆上的点是曲面的边界点。

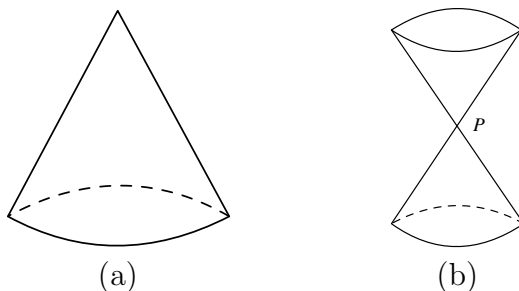


图 II-3

图 II-3-b 中两个对顶的锥面不是一张曲面。它的锥顶 P 处每个小球所切下来的小片是两个圆盘粘于一点，它不能铺成平面上的一个圆盘。于是，它在 P 点处不满足曲面所要求的性质。

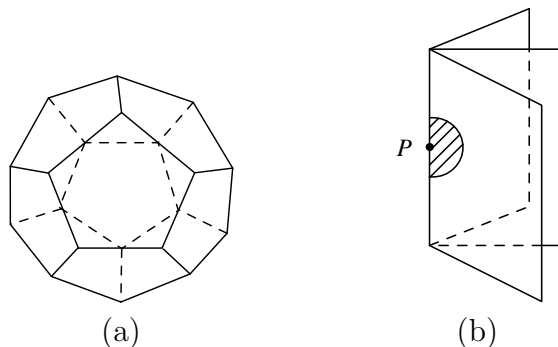


图 II-4

每个多面形显然是空间中的一张曲面（参见图 II-4-a）。而图 II-4-b 中的图形则不是曲面。因为在三平面交线上每一点 P 处，每个以 P 为心的小球切下来的小片是由三个半圆盘沿直径粘合在一起的，它不能铺成平面上的圆盘。

曲面也可以按照它的特性，分成 **可定向的曲面**（双侧曲面）和 **不可定向的曲面**（单侧曲面）这两种类型。

我们在生活中通常遇见的是可定向的曲面，如：球面、圆柱面和环面等等（参见图 II-5）。这些曲面的共同特点是：你可以用不同的颜色来油漆它们的内侧面和外侧面。

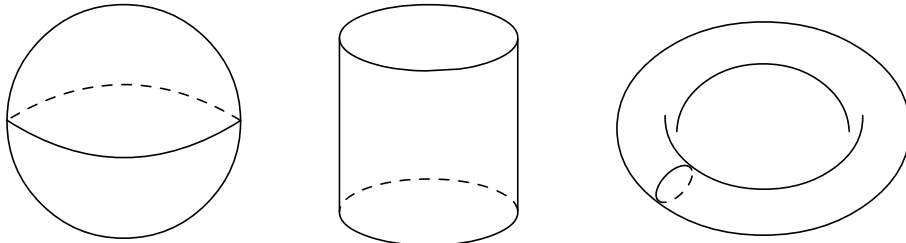


图 II-5

最简单的不可定向曲面是一种被称为 **麦比乌斯 (Möbius) 带** 的曲面。

拿一张细长的长方形纸条，将纸条的一端旋转 180° ，再与纸条的另一端粘合，得到的带边曲面就是一个麦比乌斯带 (参见图 II-6)。

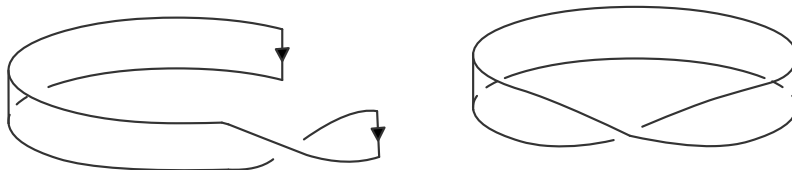


图 II-6

不寻常的是，麦比乌斯带的边界仅由一条封闭的曲线构成。

这张长方形纸条的中位线，在粘合后成为麦比乌斯带上一条封闭的曲线，称为麦比乌斯带的中位线。一只蚂蚁在麦比乌斯带上沿着这条中位线爬行一周后会到达起点的背面。

如果我们沿其中位线对麦比乌斯带进行连续油漆，则发现曲面的内外两侧被刷成同一个颜色。

如果我们以中位线上一点 P 为心在麦比乌斯带上画一个逆时针定向的小圆周，则这个小圆周随其中心绕中位线滑动一周回到 P 点时，小圆周变成顺时针定向的小圆周 (参见图 II-7)。

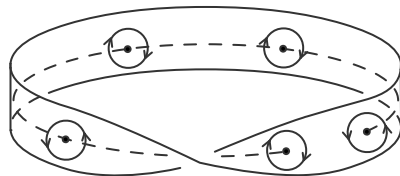


图 II-7

如果曲面上含有一个麦比乌斯带，则这张曲面就是不可定向的。我们在图 II-8 和图 II-9 中给出一系列不可定向的带边曲面的例子。

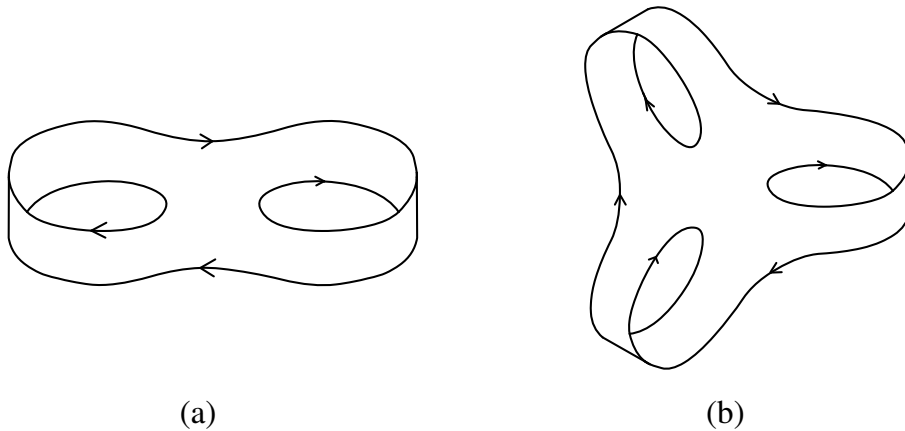


图 II-8

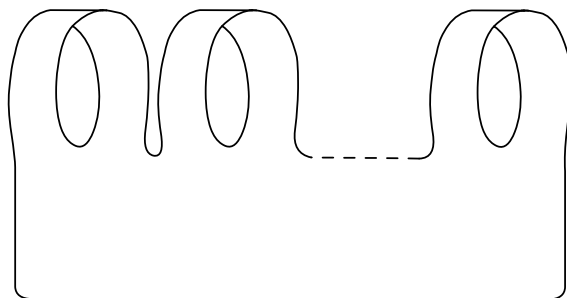


图 II-9

这些不可定向曲面均含有多个麦比乌斯带。它们的边界是由一条封闭曲线构成。

思考题 II-1

1. 将一个长方形细条一边旋转 180° 的奇数倍, 再与对边进行粘合。问: 得到的曲面是否可定向? 如果旋转 180° 的偶数倍呢?
2. 如果将一条麦比乌斯带沿中位线剪开, 得到的是一条带子还是两条带子? 得到的带子是否可定向? 它相当于一个长方形细条的一边旋转多少度, 再与对边粘合?
3. 如果将一条麦比乌斯带沿“ $1/3$ 线”剪开, 得到几条带子? 这几条带子是否可定向? 它相当于长方形纸条各旋转了多少度再与对边粘合?

§2 曲面的多边形表示

这一节中我们研究可定向曲面的多边形表示。我们总假定，所有讨论的曲面均是由橡皮制成的。

如果我们沿球面的一个定向半圆周 a 剪开，并将球面张开，便可以得到一个半球（参见图 II-10）。由于球面是橡皮制作的，我们可以进一步将这个半球平铺在平面上，成为一个圆盘，它的边界由两个半圆周组成。

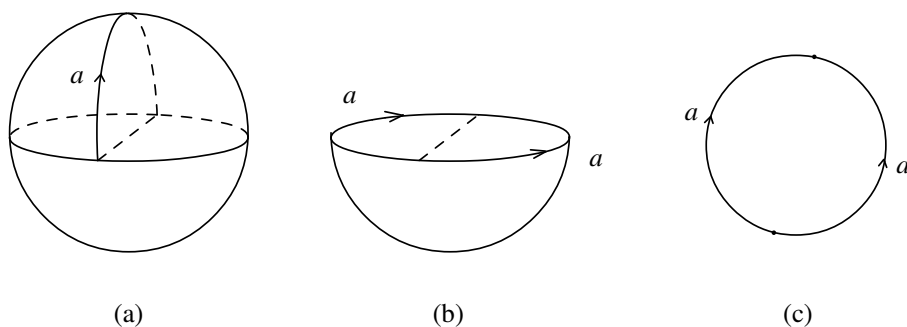


图 II-10

由于图 II-10-c 中的圆盘边界上的两个边 a 和 a 需要同向粘合，我们记这个圆盘为 aa^{-1} 。它是平面上的一个两边形。我们称两边形 aa^{-1} 为球面的多边形表示。

于是，球面可以通过同向粘合图 II-10-c 中的两边形（圆盘）的两条边而得到。

如果我们沿环面的两个圆周 a 和 b 剪开，并将它平铺在平面上，得到一个四边形，它的边界可以表示成 $aba^{-1}b^{-1}$ （参见图 II-11）。

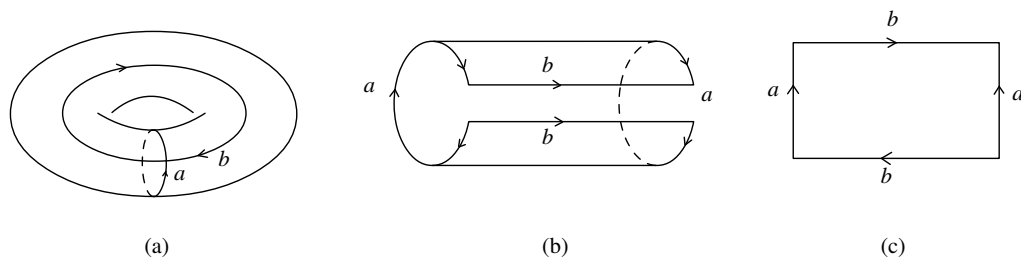


图 II-11

于是，环面可以通过同向粘合四边形的两对对边而得到。我们注意到，长方形的四个顶点在粘合后为同一个点，它是环面上圆周 a 和 b 的交点。

同样，带一个洞的环面可以通过同向粘合一个五边形的两对对边而得到，而没有粘合的一个自由边在粘合后形成环面上的一个洞（参见图 II-12）。我们同样注意到，这五边形的所有顶点在粘合后成为带洞环面上的同一个点。

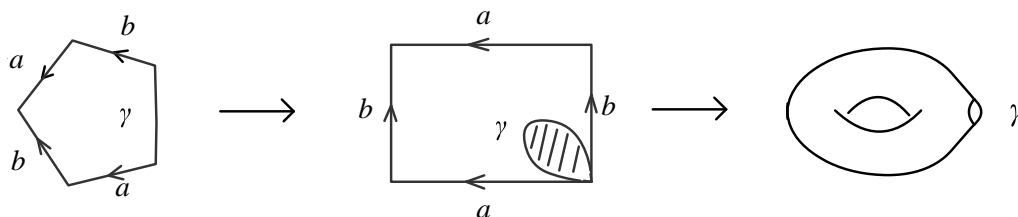


图 II-12

一个双环面可以视为两个带洞的环面沿洞的边缘粘合而成。

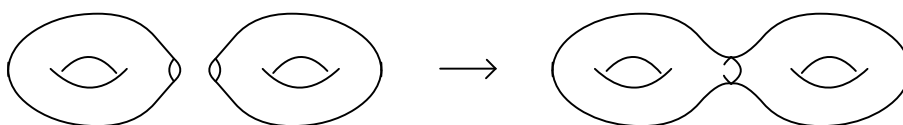


图 II-13

如果我们用五边形来表示带洞的环面，则双环面可以通过粘合两个五边形的自由边而得到（参见图 II-14）。

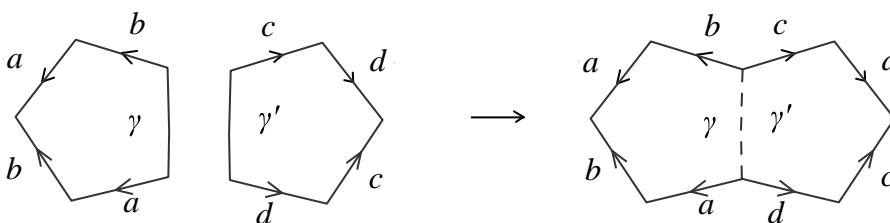


图 II-14

于是，双环面可以通过同向粘合一个八边形的四对对边而得到。我们注意到，这八边形的所有顶点在粘合后为同一个点。

由于曲面是橡皮制作的，我们可以认为，这个八边形是一个正八边形，它的边界可以表示成 $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ 。

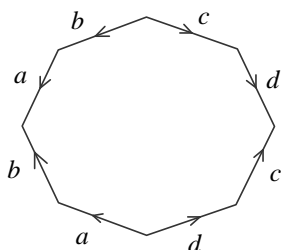


图 II-15

3-环面是由一个带洞的双环面（九边形）和一个带洞的环面（五边形）沿洞的边缘粘合而成（参见图 II-16）。

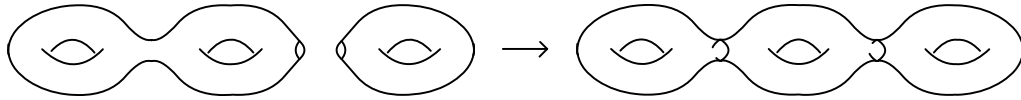


图 II-16

所以，3-环面可以由一个正十二边形通过粘合其六对对边而得到（参见图 II-17）。这个正十二边形的边界可以表成 $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}efe^{-1}f^{-1}$ 。十二边形的所有顶点在粘合后为 3-环面上的同一个点。

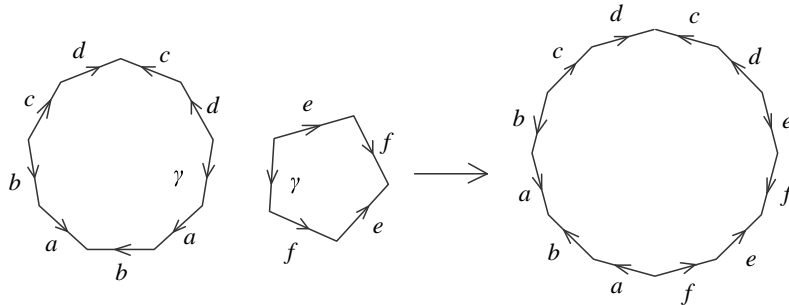


图 II-17

同样道理，一个 g -环面可以由一个带洞的 $(g-1)$ -环面和一个带洞环面沿洞的边缘粘合而成的（参见图 II-18）。

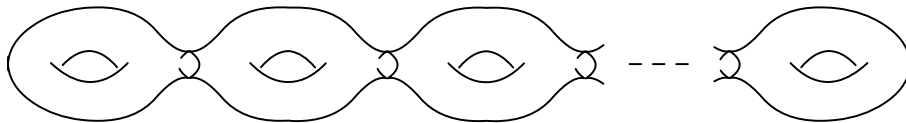


图 II-18

所以， g -环面可以通过同向粘合一个 $4g$ -边形的 $2g$ -对对边而得到（参见图 II-19）。在粘合后，多边形的所有顶点为 g -环面上的同一个点。这个 $4g$ -边形的边界可以表成 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ 。

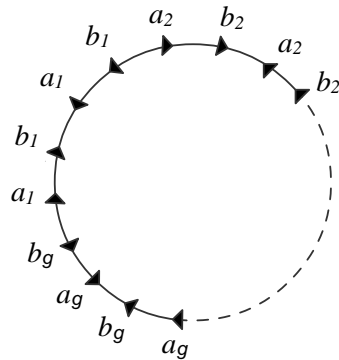


图 II-19

我们称这个 $4g$ - 边形为 g - 环面的多边形表示。

思考题 II-2

1. 试给出圆柱面的一个多边形表示。
2. 试给出麦比乌斯带的一个多边形表示。
3. 试给出带两个洞的环面的一个多边形表示。
4. 试给出带两个洞的双环面的一个多边形表示。

§3 曲面的三角剖分

从图 I-2-d 知道, 环面可由一个多面形形变而得到。将多个图 I-2-d 中的多面形拼在一起, 我们容易构造一个多面形 \mathbb{P}_g (参见图 II-20-a), 它可以形变成 g - 环面 (参见图 II-20-b)。

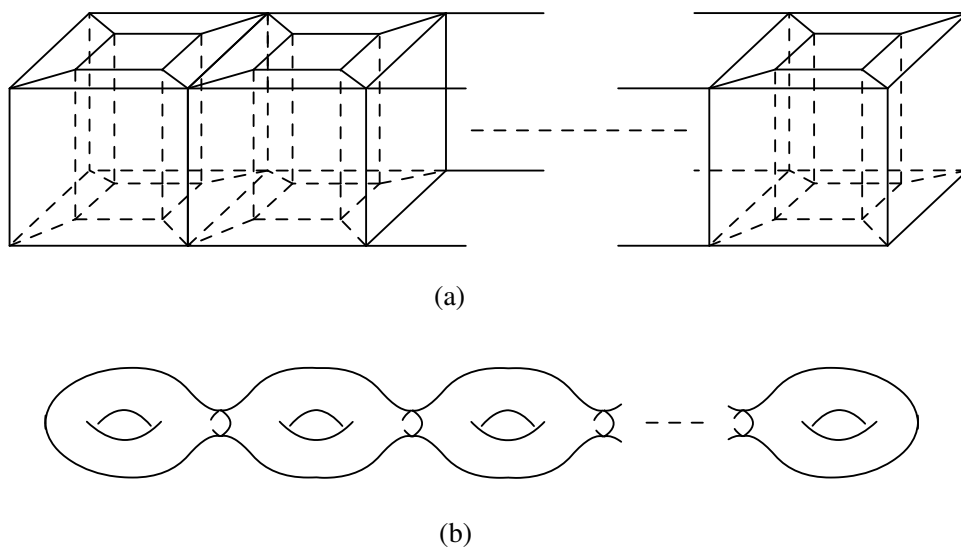


图 II-20

如果我们事先将多面形 \mathbb{P}_g 的每个面分割成三角形, 则形变后这些三角形便构成这个 g - 环面上的一个地图。

我们可以观察到, 整个曲面被分割成若干个曲边三角形。这样的三角地图满足以下的性质:

- (i) 每两个顶点均可以用由若干条边组成的道路相连;

- (ii) 每两个三角形或者没有公共点、或者交于一个公共顶点、或者交于一条公共边；
- (iii) 每条边恰是两个三角形的公共边；
- (iv) 每个顶点均是锥形的顶点。

我们用图 II-21 来形象说明顶点是锥形的含义。顶点被以它为一个顶点的所有三角形包围在其中，且这些三角形拼成一个伞状的图形。图中的 $\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$ 是从此顶点出发的所有的边，而 $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r\}$ 是以此顶点为一个顶点的所有不同的三角形。这里我们规定 $r \geq 3$ 。

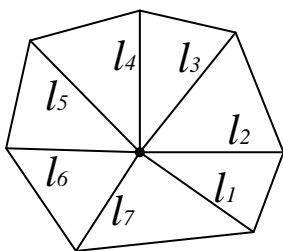


图 II-21

我们说明，如果一个几何图形上可以画出满足以上条件的三角地图，则一定是一张无边的曲面。

为此，我们需要说明，这样的几何图形的每一点一定含在图形中的某个小圆盘的内部。

我们在几何图形上任取一点 P 。

如果 P 是地图的某个顶点，由性质 (iv) 知道，它是锥形的。所有以它为共同顶点的三角形构成一个伞状的圆盘，含有 P 作为圆盘的内点。

如果 P 是边上的一点，则由性质 (iii)，我们可以得到两个以此边为公共边的三角形。这两个三角形构成一个圆盘，以 P 作为它的内点。

如果 P 落入某个三角形中，则这个三角形本身便是一个圆盘，且以 P 为内点。

于是，这个几何图形的每一点均落入图形中的一个小圆盘内部，所以它一定是一张无边的曲面。

曲面上满足条件 (i)~(iv) 的三角地图称为曲面的一个 **三角剖分**。

我们先来看一些曲面的三角剖分的例子。

在球面中作一个内接的正四面形，并以球心为投射中心将正四面形投射到球面，便得到球面的一个三角剖分（参见图 II-22-a）。

这样的三角剖分是立体的，画起来很困难。我们想像球面是由橡皮制成的，便可以将 AB 弧剪开，平铺在平面上，得到球面一个三角剖分的平面图（参见图 II-22-b）。

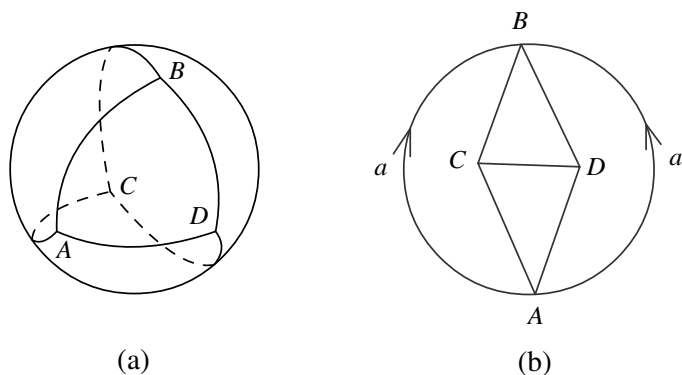


图 II-22

请读者自行验证，球面的这个三角剖分满足定义的条件 (i)，(ii)，(iii) 和 (iv)。

环面可以通过同向粘合长方形的两对对边而得到。它的一个三角剖分如图 II-23-b 所示。

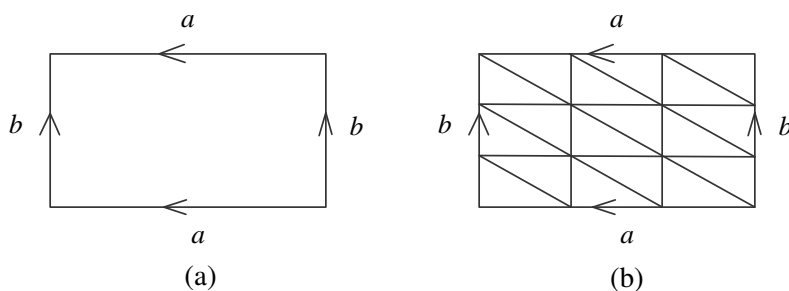


图 II-23

请读者自行验证，环面的这个三角剖分满足定义的条件 (i)，(ii)，(iii) 和 (iv)。要注意的是，粘合的对边在环面上是同一个边。

同样， g -环面是通过粘合一个 $4g$ -边形的 $2g$ -对对边而得到。与环面一样，我们也可以通过将这个 $4g$ -边形进行三角剖分，从而得到 g -环面的一个三角剖分。

另一个办法是先将图 II-20-a 中的多面形 \mathbb{P}_g 的每个面进行三角剖分，然后再形变成 g -环面，得到 g -环面的一个立体的三角剖分。

由于 g -环面的三角剖分图比较复杂，我们不在这给出。

如果在曲面上存在一个由 **有限个** 曲边三角形构成的三角剖分, 我们就称这个曲面为 **闭曲面**,

于是, 球面、环面和 g -环面 (g 为正整数) 均是闭曲面。

设 S 是一个闭曲面; 设 \mathbb{M} 是 S 的一个三角剖分; 我们记 V 为这个三角剖分的顶点个数; E 为棱的个数; F 为三角形的个数 (面的个数), 并定义三角剖分的欧拉数为

$$\chi(\mathbb{M}) = V - E + F.$$

闭曲面的每个三角剖分 \mathbb{M} 可以通过重复以下的步骤进行加细:

- (i) 在三角剖分的某个三角形的一条边上增加一个顶点, 将此边分成两条边。连接此新增的顶点和三角形的对顶点, 将此三角形分成两个三角形。
- (ii) 在三角剖分的某个三角形的两条边上各增加一个顶点。连接这两个顶点将三角形分成一个三角形和一个四边形。连接四边形的一条对角线, 将四边形分成两个三角形。

三角剖分 \mathbb{M} 经过若干次以上的加细手术后, 得到一个新的三角剖分 \mathbb{M}^* 。我们称 \mathbb{M}^* 为三角剖分 \mathbb{M} 的一个 **加细**。

我们注意到, 在进行第一个步骤时, 顶点和面各增加一个, 而边增加两条, 三角剖分的欧拉数保持不变。

在进行第二个步骤时, 顶点和面各增加两个, 边增加四条, 三角剖分的欧拉数还保持不变。

于是, 我们有

引理 闭曲面的三角剖分和它的加细剖分有相同的欧拉数。

假定 \mathbb{M}_1 和 \mathbb{M}_2 是闭曲面 S 上的两个拥有有限个三角形的三角剖分。它们构成曲面 S 上的两张地图。

我们可以挪动其中一张地图的若干条棱, 使其与另一张地图的棱相交。轻微挪动一些棱, 我们可以保证这两张地图有有限个交点。通过增加一些两图相交而自然形成的顶点和棱, 再增加一些对角线将每个相交形成的多边形分割成三角形, 我们可以得到曲面 S 的一个新的三角剖分 \mathbb{M} 。这个三角剖分 \mathbb{M} 既是 \mathbb{M}_1 的一个加细, 又是 \mathbb{M}_2 的一个加细。

由于上述说明比较抽象, 我们用一个六边形的三角剖分作为例子来作进一步说明, 两个三角剖分有共同的加细剖分。

图 II-24-a 和图 II-24-b 分别是正六边形的两个三角剖分 \mathbb{M}_1 和 \mathbb{M}_2 。

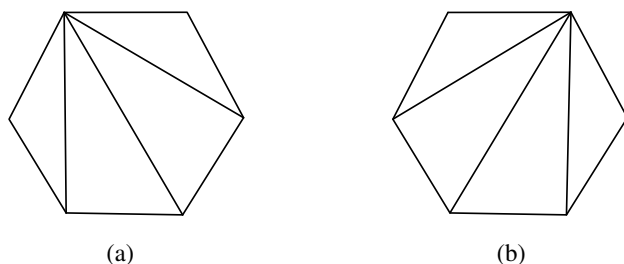


图 II-24

将这两个剖分重叠在一起, 形成图 II-25-a。我们将图 II-25-a 中的多边形进一步进行三角剖分, 得到正六边形的一个三角剖分 \mathbb{M} (参见图 II-25-b)。

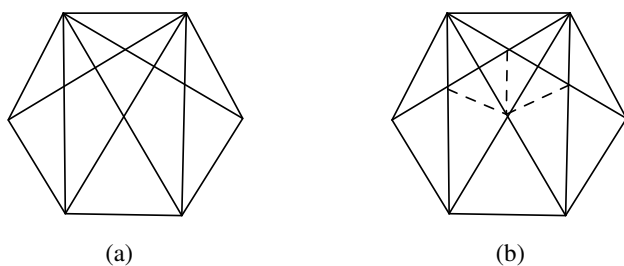


图 III-25

请读者自行验证, 三角剖分 \mathbb{M} (参见图 II-25-b) 既可以通过 \mathbb{M}_1 (参见图 II-24-a) 进行加细手术而得到, 也可以通过 \mathbb{M}_2 (参见图 II-24-b) 进行加细手术而得到。

由于闭曲面上任何两个三角剖分 \mathbb{M}_1 和 \mathbb{M}_2 拥有一个共同的加细剖分 \mathbb{M} , 而且由引理知道, 三角剖分和它的加细剖分有相同的欧拉数。故

$$\chi(\mathbb{M}_1) = \chi(\mathbb{M}) = \chi(\mathbb{M}_2).$$

于是, 以下的定理成立:

三角剖分定理 闭曲面的任何两个三角剖分有相同的欧拉数。

设 S 为一个闭曲面。取 S 的一个三角剖分 \mathbb{M} , 我们定义 \mathbb{M} 的欧拉数为闭曲面 S 的 **欧拉示性数**。

由三角剖分定理得知, 闭曲面的欧拉示性数与三角剖分的选取无关, 它体现了闭曲面本身的性质。

从球面的三角剖分图 II-22-b 可见, 它有四个顶点, 四个面和六条棱。所以, 球面的欧拉示性数为 2。

从环面的三角剖分图 II-23-b 来看, 长方形的四个角点在粘合后为同一个点。两对对边需要粘合。于是, 这个三角剖分的顶点个数为九, 棱的个数为十八, 面的个数为九。所以, 环面的欧拉示性数为 0。

其实，我们有以下更好的方法来计算球面和环面的欧拉示性数。

我们重新来计算球面三角剖分图 II-22-b 的欧拉数。当我们相继去掉一个圆盘内部的一条棱时，或是棱和面各减少一个，或是棱和顶点各减少一个，而欧拉数保持不变（参见图 II-26）。所以，我们可以去掉圆盘内部的所有棱，而计算球面多边形表示（图 II-26-c）的欧拉数：它有两个顶点 A 和 B ，一条棱 a 和一个面，故欧拉数为 2。

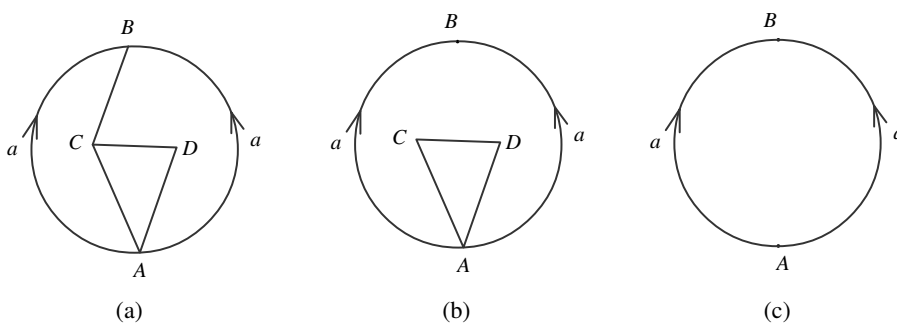


图 II-26

同样，我们重新考察环面的三角剖分图 II-23-b。当我们相继去掉一个长方形内部的一条棱时，或是棱和面各减少一个，或是棱和顶点各减少一个，而欧拉数保持不变（参见图 II-27）。所以，我们可以去掉长方形内部的所有棱，而计算环面多边形表示（图 II-27-b）的欧拉数：它有一个顶点（粘合后四个角点为同一个点），两个棱 a ， b 和一个面，故欧拉数为 0。

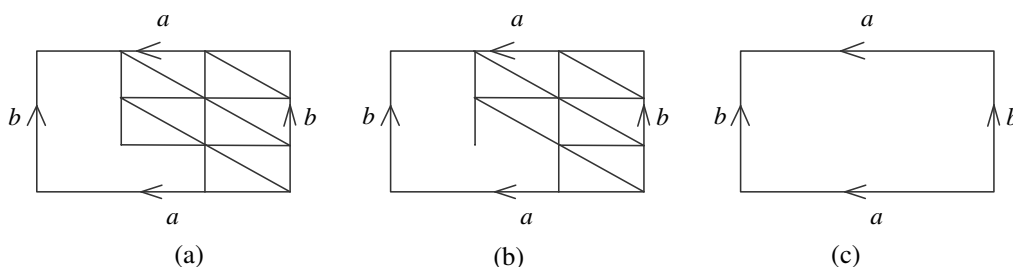


图 II-27

同样道理，要计算 g -环面的欧拉数，我们只需计算它所对应的多边形表示的欧拉数（参见图 II-19）：它有一个顶点， $2g$ -条棱和一个面，故欧拉示性数为 $(2 - 2g)$ 。

于是，我们得到以下的

闭曲面示性数定理 球面和 g -环面的欧拉示性数分别为 2 和 $(2 - 2g)$ ，其中 g 取正整数。

作为三角剖分定理和闭曲面示性数定理的推论，我们有

拓扑欧拉定理 II 如果一个多面形可以形变成一个 g - 环面，则有公式

$$V - E + F = 2 - 2g.$$

思考题 II-3

1. 验证球面和环面的三角剖分（图 II-22-b 和图 II-23-b）中每个顶点是锥形的。
2. 在球面中作一个内接正六面形，并从球心将它投射到球面上，得到球面的一个三角剖分。试用平面图形来表示此三角剖分，并由此计算球面的欧拉示性数。
3. 在球面中作一个内接正八面形，并从球心将它投射到球面上，得到球面的一个三角剖分。试用平面图形来表示此三角剖分，并由此计算球面的欧拉示性数。
4. 试利用图 II-20-a 中的多面形来计算 g - 环面的欧拉示性数。（提示：参见思考题 I-1 的题 1 和题 2。）

§4 闭曲面的分类

设 S 和 S' 是两个曲面， $\phi: S \rightarrow S'$ 是曲面间的一个 1-1 对应。如果 ϕ 满足以下性质：当 ϕ 将一点 P 映成 P' 点时，同时将曲面 S 中与 P 邻近的点对应到曲面 S' 中与 P' 邻近的点，我们就称 ϕ 为一个 **拓扑映射**。当 $S = S'$ ，我们称拓扑映射为 **拓扑变换**。

如果两张曲面之间存在一个拓扑映射，我们就称这两张曲面是 **同胚** 的。

由定义我们知道，如果 $\phi: S \rightarrow S'$ 和 $\psi: S' \rightarrow S''$ 是曲面间的拓扑映射，则它们的逆映射和它们的复合映射 $\psi \circ \phi: S \rightarrow S''$ 还是拓扑映射。

于是，如果曲面 S 与 S' 同胚，而 S' 与 S'' 同胚，则 S 必然与 S'' 同胚。

曲面 S 上最直观的拓扑变换是曲面自身的 **形变**。

我们在一张连通的曲面上铺一层弹性非常好的橡皮薄膜，然后让橡皮薄膜在曲面上进行形变。我们假设在形变过程中橡皮薄膜没有破损，也没有将薄膜上的两个点挤成一个点。曲面上（薄膜上）的一个点 P 在形变后对应到曲面上的另一点 P' ，于是导出曲面上的一个变换 $\phi: S \rightarrow S$ 。我们称这个变换为曲面到自身的一个形变。

由于形变将与 P 邻近的点对应到与 P' 邻近的点，形变是曲面自身的一个拓扑变换。

我们称曲面上的不间断曲线为曲面上的 **道路**。

如果曲面上任何两点均可以用一条不间断的曲线相连接，我们就称这个曲面是 **连通** 的。

在一张连通的曲面上挖去一个圆盘，我们得到一个带洞的曲面。我们同样在这带洞的曲面上铺一层橡皮薄膜，然后让橡皮薄膜上的这个洞沿曲面进行移动。于是，曲面上的洞可以通过曲面自身的形变移动到曲面的任何地方。

图 II-28 中的曲面在 P 点处有一个圆盘 D_1 。我们可以沿曲面的一条道路将圆盘 D_1 形变成 Q 点处的圆盘 D_2 。

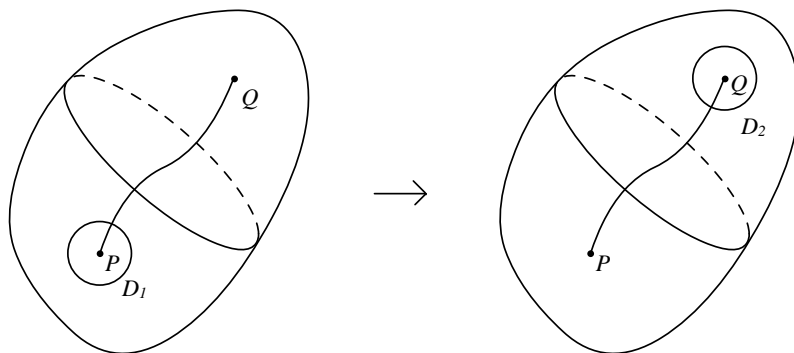


图 II-28

换言之，如果 D_1 和 D_2 是表面上的两个圆盘，则存在表面的一个形变 $\phi: S \rightarrow S$ ，它使得 $\phi(D_1) = D_2$ 。

于是，曲面挖去一个洞（圆盘），不论洞在曲面的哪个位置，得到的带洞曲面在同胚的意义下是相同的。

这也说明，两个带洞的环面，可以沿洞的边界进行粘合，得到一个双环面。不论这两个洞挖在何处，得到的双环面，在同胚的意义下是相同的（参见图 II-13）。

设 S 是空间中的一张曲面。假定曲面是由橡皮制作的，我们在空间中将曲面 S 形变到新的曲面 S' 。 S 上的一点 P 在形变后成为 S' 上的一点 P' 。我们称曲面间的对应 $P \rightarrow P'$ 为 **形变映射**。图 II-29 演示一个环面在空间中形变成另一个环面。

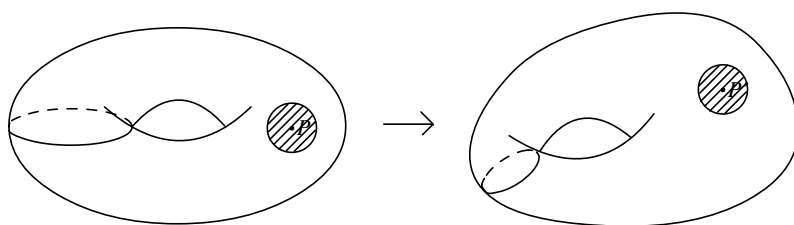


图 II-29

显然，形变映射 $\phi: S \rightarrow S'$ 同时将与 P 邻近的点对应到与 P' 邻近的点。所以，形变映射是拓扑映射。曲面 S 和它形变后的曲面 S' 一定是同胚的。

反之，空间中两张同胚的曲面之间不一定存在形变映射。

图 II-30-a 中的曲面是一个普通的、不打结的环面 S 。图 II-30-b 中的曲面是一个打结的环面 S' 。显然，不打结的环面不能在空间中形变成打结的环面。故 S 和 S' 之间不存在形变映射。

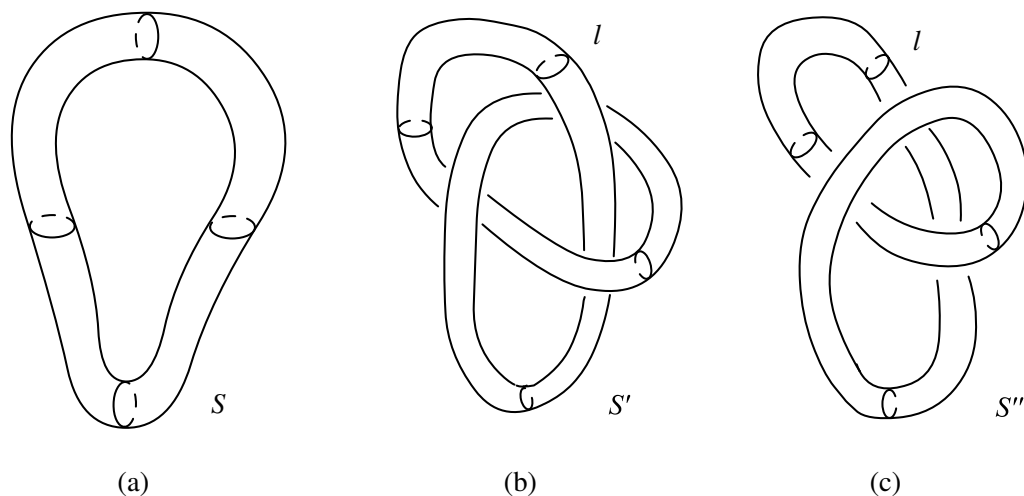


图 II-30

但是 S 和 S' 之间确实存在同胚映射。为了说明这一点，我们将 S' 沿它的一个截面 l 剪开，并解开结。然后再将截面 l 按原方位粘好，得到一个不打结的环面 S'' （参见图 II-30-c）。

在这个手术过程中， S' 的每个点 P' 对应到 S'' 中的对应点 P'' ，而且与 P' 邻近的点对应到与 P'' 邻近的点。所以，映射 $P' \rightarrow P''$ 是曲面 S' 到 S'' 的一个拓扑映射，记为 ϕ 。

又由于 S'' 和 S 均是不打结的环面，故存在从 S'' 到 S 的一个形变映射，记为 ψ 。

于是， $\psi \circ \phi: S' \rightarrow S$ 是环面 S' 和 S 之间的拓扑映射。这个拓扑映射不是形变映射。

在拓扑学的研究中，两张同胚的曲面被视为相同的曲面。我们的任务是对所有的曲面在同胚的意义下进行分类，看看有多少互不同胚的曲面类型。

设 $\phi: S \rightarrow S'$ 是拓扑映射。我们来研究曲面的哪些性质会在拓扑映射下保持不变。

设 γ 是曲面 S 上一条不间断的曲线，它在拓扑映射 ϕ 的对应下映成曲面 S' 上的一条曲线。设 P 是曲线 γ 上的一个点，它在曲线 γ' 上的对应点称为 P' 。由于 ϕ 是拓扑映射，它将与 P 邻近的点映成与 P' 邻近的点。由于曲线 γ 在 P 点是不间断的，所以曲线 γ' 在 P' 点也不间断。

于是，我们直观说明了

命题 4.1 拓扑映射 $\phi: S \rightarrow S'$ 将曲面 S 上道路映成曲面 S' 上的道路。

作为命题 4.1 的推论，我们有

命题 4.2 如果两曲面 S 和 S' 同胚, 且其中一个曲面连通, 则另一个曲面也连通。

现设 $\phi: S \rightarrow S'$ 是两个闭曲面间的一个拓扑映射。设 \mathbb{M} 是 S 上的一个三角剖分。则拓扑映射 ϕ 将 \mathbb{M} 映成曲面 S' 上的一个三角剖分 \mathbb{M}' 。因为 ϕ 是曲面间的拓扑映射, 它将 \mathbb{M} 中的顶点、棱和面 (曲边三角形) 1-1 对应到 \mathbb{M}' 中的顶点、棱和面, 所以, 我们有

$$\chi(S) = \chi(\mathbb{M}) = \chi(\mathbb{M}') = \chi(S').$$

于是, 我们证明了

示性数不变定理 两个同胚的闭曲面有相同的欧拉示性数。

由于球面和 g -环面的欧拉示性数分别是 2 和 $(2 - 2g)$, 所以我们得到结论:

闭曲面分类定理 I 球面和 g -环面 (g 取正整数) 构成互不同胚的一个闭曲面系列。

事实上, 以下的分类定理成立:

闭曲面分类定理 II 任何一个可定向的闭曲面或者与球面同胚; 或者与一个 g -环面同胚, 其中 g 为正整数。

分类定理 II 的证明需要许多的篇幅, 我们将它略去。

作为例子, 我们希望能够确定图 II-32 中的闭曲面的类型。

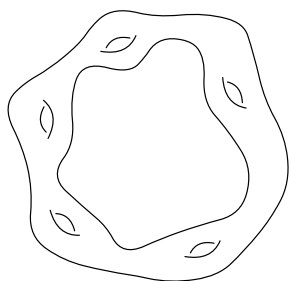


图 II-31

首先, 这个曲面显然是一个定向曲面。

我们在曲面上选择一个截面 l , 将这个截面沿曲面上的一个道路进行形变, 最后可以得到一个带六个“洞”的环面。所以, 这个曲面可以形变成一个 6-环面。图 II-32 演示了这个形变过程。

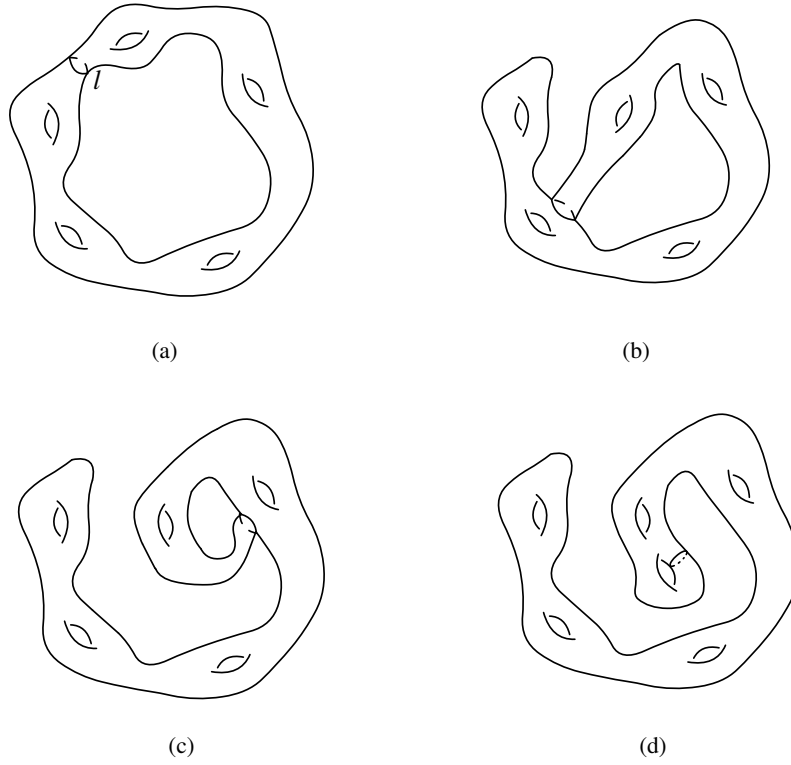


图 II-32

思考题 II-4

1. 试说明：挖去一个洞的环面可以形变成一个对边粘合的十字纸条。

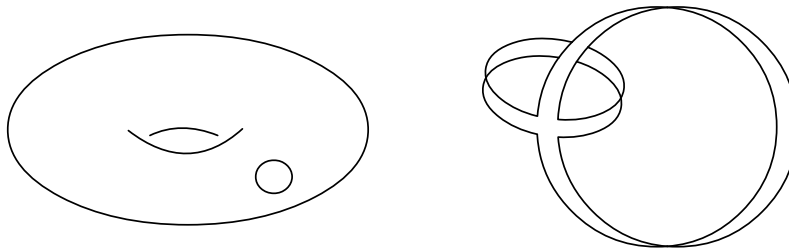


图 II-33

2. 试说明：图 II-34 中的“球面加两个环柄”可以形变成双环面。

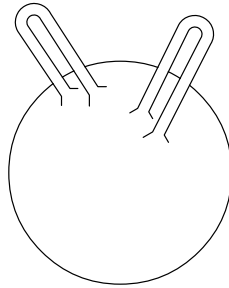


图 II-34

3. 试计算图 II-35 中的闭曲面的欧拉示性数。

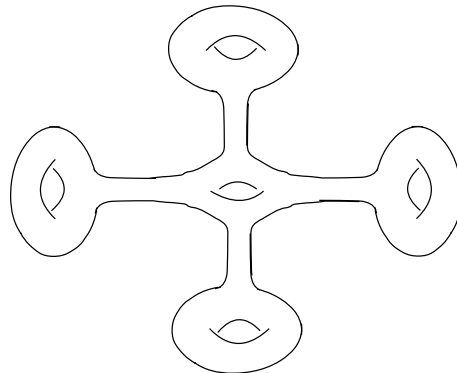


图 II-35

4. 试说明：将一个长方形细条的一边旋转 540° ，再与另一边粘合，得到的曲面 S （参见图 II-36-a）与麦比乌斯带（参见图 II-36-b）同胚。但 S 不能在空间中形变成麦比乌斯带。（提示：曲面 S 的边界是一个打结的圈。）

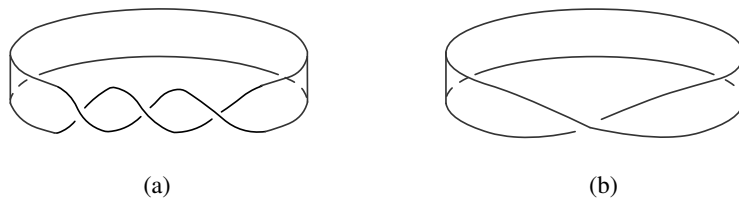


图 II-36

§5 曲面的拓扑学历史简介

拓扑学是十九世纪发展起来的一个几何学的分支，在发展的初期被称为位置分析学。它研究几何图形的某些特殊性质，这些性质在图形的形变、伸缩下保持不变。

拓扑学中研究的几何图形通常被想象成用橡皮制成的，这样可以进行连续的形变。在形变过程中，我们总假设橡皮没有破损，也没有将图形上的任何两点挤成一个点。于是，图形的每一点对应到形变图形上的一点，并且也将与之邻近的点变成邻近点。

几何图形的形变通常与它所处的空间有关。在我们的生活空间中，一个打结的封闭橡皮管在空间中不能形变成一个不打结的封闭橡皮管。但这两个橡皮管表面上的点之间确实存在一个 1-1 对应，这个对应能够将一点的邻近点变成对应点的邻近点。

如果两图形间存在一个 1-1 对应，它将一点的邻近点变成对应点的邻近点，我们就称这两个图形是同胚的。两个同胚的图形在拓扑学中被视为一样的。于是，打结的封闭橡皮管表面和轮胎的表面（称为环面）在拓扑学中是同一个曲面。球面和环面之间没有这样的 1-1 对应，所以是不同胚的。

曲面的组合性质的发现是由欧拉公式所引起的。欧拉对凸多面体的顶点的个数 V 、棱的条数 E 和面的个数 F 进行研究，得到欧拉公式 $V - E + F = 2$ ，并在他的一篇论文中给出了证明。人们进而发现，只要多面体的表面可以形变成球面，则欧拉公式也成立。如果多面体的表面可以形变成一个环面，则 $V - E + F = 0$ 。于是，每个闭曲面均对应一个整数，称为欧拉示性数。曲面的欧拉示性数为 2，而环面的欧拉示性数为 0。

麦比乌斯 (Möbius) 在 1863 年首先提出将闭曲面剪开，平铺在平面上，成为平面上的一个多边形。如果将多边形的对应边粘合起来，便重新得到一个曲面。这样，每个闭曲面均可以用多边形来表示。麦比乌斯将一个长方形纸条的一边旋转 180° ，再与对边进行粘合，得到一个带边的单侧曲面，曲面的边界是一条封闭的曲线。人们将这个单侧曲面称为麦比乌斯带。

约当 (Jordan) 在 1866 年证明，两个可定向的（即双侧的）闭曲面同胚，当且仅当它们有相同的欧拉示性数。

克莱茵 (Klein) 于 1874 年证明射影平面是不可定向的（即单侧的）闭曲面，并于 1882 年找到另一个不可定向的闭曲面，它是由两个麦比乌斯带沿边界粘合得到的。人们将这个曲面称为克莱茵瓶。不可定向的闭曲面

在我们生活的空间中装不下，只能在四维空间才能看到它的全貌。可定向的闭曲面和不可定向的闭曲面构成互不同胚的两个闭曲面系列。

狄克 (Dyck) 于 1888 年对不可定向闭曲面进行了分类。每个不可定向的闭曲面也对应一个整数，称为欧拉示性数。狄克证明：两个不可定向的（即单侧的）闭曲面同胚，当且仅当它们有相同的欧拉示性数。

(王长平拥有此讲义版权)