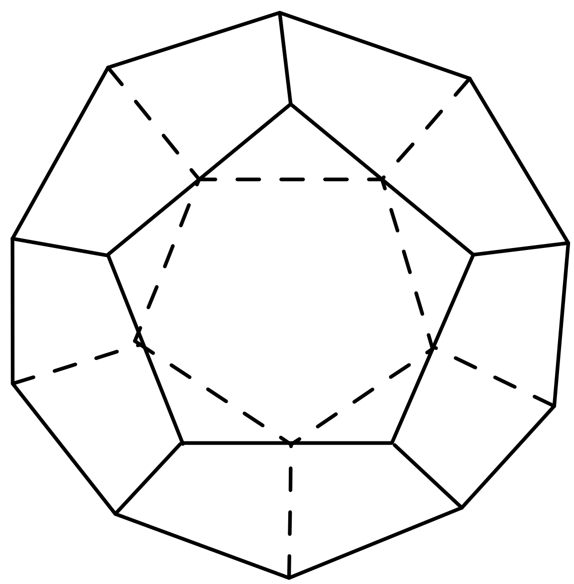
平面几何与变换群



2012 数学之星讲义

北京大学数学科学学院

王长平

讲义简介

二维常曲率空间有三种类型：欧式平面 $\mathbb{E}^2$，球面 $\mathbb{S}^2$ 和双曲平面 $\mathbb{H}^2$.

$\mathbb{E}^2$ 中的直线反射、旋转和平移可以非常直观地描述. 平面旋转和平移可以视为两个直线反射的复合，而 $\mathbb{E}^2$ 中的等距变换表成至多三个直线反射的复合.

通过这本小讲义我们向读者介绍球面 $\mathbb{S}^2$ 和双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 中的直线、圆，以及直线反射、等距变换等知识，学习和理解其中的数学思想和方法，并用直观来感受几何之美。

目录：

第 1 章 平面几何

设 $\mathbb{E}^2$ 为一张平面．我们称 $\mathbb{E}^2$ 到自身的一一对应为平面的一个 变换. 换言之，平面的一个变换是满足以下条件的映射 $\phi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$: 任给 $P' \in \mathbb{E}^2$, 存在唯一点 $P \in \mathbb{E}^2$, 使得 $\phi(P) = P'$. 我们称 P' 点为 P 在变换 ϕ 下的 象, 称 P 为 P' 关于变换 ϕ 的 原象.

定义 1.1 如果平面上的一个变换保持任意两点的距离不变, 我们就称这个变换为平面的 等距变换.

定义 1.2 平面上两个三角形，如果存在一个平面等距变换，它将一个三角形变成另一个三角形，则称这两个三角形是全等的.

我们用 $d(P,Q)$ 来表示 P,Q 两点之间的距离，则 $\phi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ 为一个等距变换，当且仅当对 $\mathbb{E}^2$ 上任意两点 P, Q, 总有

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P,Q).$$

平面上最平凡的等距变换是 恒同变换$id : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, 它将平面上每个点映成它自己．换言之，它保持平面上的每个点不动.

平面上的每条直线 l 将平面分割成两个不相交的半平面 $\mathbb{E}^2_+$ 和 $\mathbb{E}^2_-$. 这时， $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2_+ \cup l \cup \mathbb{E}^2_-$. 每条直线 l 唯一确定平面上的一个 反射变换（直线反射） $l : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, 它保持直线 l 上的每一点不动，并将 $\mathbb{E}^2_+$ 中的点 P 映成它在 $\mathbb{E}^2_-$ 中的对称点 P'. 这里，我们用 l 同时表示直线和关于此直线的反射变换.

反射变换是平面上最为简单的一类等距变换．反射变换的另一个重要性质是：它将每个逆时针定向的圆周 Γ 映成一个顺时针定向的圆周 Γ', 即当动点 X 沿圆周 Γ 作逆时针运动时，它的对称点 X' 沿 Γ' 作顺时针运动．于是，反射变换是平面上的一个 反定向的变换.

定义 1.3 设 ϕ 和 ψ 是平面 $\mathbb{E}^2$ 上的两个变换．设 P 为 $\mathbb{E}^2$ 上一点，ϕ 将 P 映成 P', 而 ψ 又将 P' 映成 P''. 我们称由对应 $P \to P''$ 所给出的平面变换为 ϕ 和 ψ 的 复合变换, 记为 $\psi \circ \phi$.

设 l_1 和 l_2 为平面上两条直线,它们定义了平面上的两个直线反射 $l_1, l_2 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$. 我们考察它们的复合变换 $l_2 \circ l_1 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$.

如果 l_1 和 l_2 是平面上两条平行的直线，我们称复合变换 $l_2 \circ l_1$ 是一个 平移变换. 设 l_1 和 l_2 的间距为 d, 则 $l_2 \circ l_1$ 将平面上的每一点沿 l_1

到 l_2 的垂直方向平移 $2d$ 的距离. 显然, 变换 ϕ 为平移变换的充要条件是对任何 P 来说 $\overrightarrow{P\phi(P)}$ 与 P 无关, 为常向量.

如果 l_1 和 l_2 是平面上两条相交直线, 我们称复合变换 $l_2 \circ l_1$ 是一个旋转变换. 设 l_1 和 l_2 交点为 O, 且 l_1 绕 O 点逆时针旋转到 l_2 的旋转角度为 θ , 则 $l_2 \circ l_1$ 将平面上的每一点绕 O 点从 l_1 到 l_2 的方向旋转 2θ 角.

由于平移变换或旋转变换是两个反射变换的复合, 它总将逆时针定向的圆周映成逆时针定向的圆周, 所以平移变换或旋转变换是 保定向的变换.

定义 1.4 设 ϕ 为平面 $\mathbb{E}^2$ 上的一个变换. 对 $\mathbb{E}^2$ 上的任意点 P', 存在唯一点 P, 使得 $\phi(P) = P'$. 我们称由对应 $P' \to P$ 给出的平面变换为 ϕ 的 逆变换, 记为 ϕ^{-1}.

根据平面变换的定义, 容易得到

命题 1.1 设 ϕ, ψ 和 ρ 为平面上的变换. 则有

(1) $(\rho \circ \psi) \circ \phi = \rho \circ (\psi \circ \phi)$;

(2) $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = id$

(3) $(\phi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$.

命题 1.2 如果 ϕ 和 ψ 为平面上的等距变换, 则它们的逆变换 ϕ^{-1}, ψ^{-1} 和复合变换 $\psi \circ \phi$ 也是等距变换.

证明: 设 P, Q 为平面上任意两点. 因为 ϕ 和 ψ 均为等距变换, 则有

$$d(\phi^{-1}(P), \phi^{-1}(Q)) = d(\phi(\phi^{-1}(P)), \phi(\phi^{-1}(Q))) = d(P, Q);$$

$$d(\psi(\phi(P)), \psi(\phi(Q))) = d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q).\square$$

我们可以通过直线反射的多次复合来得到更多的等距变换. 显然, 奇数个直线反射的复合变换是反定向的, 偶数个直线反射的复合变换是保定向的.

命题 1.3 等距变换 $\phi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ 将直线映成直线.

证明 设 P, Q, R 为平面上共线的三点, 且 Q 落在线段 $\overline{PR}$ 上. 则有

$$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R).$$

因为 ϕ 为等距变换，由上式得到

$$d(\phi(P),\phi(Q))+d(\phi(Q),\phi(R))=d(\phi(P),\phi(R)).$$

由平面几何中的三角不等式推出， $\phi(Q)$ 必定落在线段 $\overline{\phi(P)\phi(R)}$ 上. □

定义 1.5 设 $\phi:\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2$ 为平面上的一个变换．如果 $P\in\mathbb{E}^2$ 满足 $\phi(P)=P$, 我们称 P 为变换 ϕ 的一个不动点.

我们知道，平面上所有点均是恒同变换 $id:\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2$ 的不动点；直线反射 $l:\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2$ 的不动点为直线 l 上的所有点；旋转变换 ϕ 有唯一的不动点，它恰是 ϕ 的旋转中心．平移变换则没有不动点 (除非它是恒同变换).

命题 1.4 如果一个平面等距变换拥有三个不共线的不动点, 则为恒同变换.

证明 设 ϕ 是一个等距变换, 它拥有三个不共线的不动点 P,Q 和 R. 记 l 为直线 PQ. 由命题 1.3 知， ϕ 将 l 映成 l. 于是对任何 $X\in l$, 我们有 $\phi(X)\in l$, 并且

$$d(\phi(X),P)=d(\phi(X),\phi(P))=d(X,P);$$

$$d(\phi(X),Q)=d(\phi(X),\phi(Q))=d(X,Q).$$

故有 $\phi(X)=X$. 这说明，直线 l 上的所有点必为 ϕ 的不动点．同理，直线 PR 和 QR 上的所有点均为 ϕ 的不动点．现设 X 是平面上的任意一点，过点 X 作一直线 l' 分别交直线 PQ 和直线 PR 于 Y 和 Z. 因为 Y 和 Z 为 ϕ 的不动点，所以直线 YZ 上的所有点均是 ϕ 的不动点，故 X 也是 ϕ 的不动点．这样，所有平面上的点均为 ϕ 的不动点， ϕ 为恒同映射． □

命题 1.5 如果一个平面等距变换至少有两个不动点, 则它或是恒同变换，或是一个直线反射.

证明 设 ϕ 是一个等距变换，它拥有两个不共线的不动点 P 和 Q. 设 l 为直线 PQ. 如果在直线 l 外有 ϕ 的不动点，则由命题 1.4 知 ϕ 为恒同映射．如果在直线 l 外没有 ϕ 的不动点，则对任何 l 外的一点 X 有

$$d(l(X),P)=d(X,P)=d(\phi(X),\phi(P))=d(\phi(X),P);$$

$$d(l(X),Q)=d(X,Q)=d(\phi(X),\phi(Q))=d(\phi(X),Q).$$

故 $X, l(X)$ 和 $\phi(X)$ 三点到 P,Q 的距离相等. 因为 $\phi(X) \neq X, l(X) \neq X$, 所以 $\phi(X) = l(X)$. 这时 ϕ 是直线反射. $\square$

命题 1.6 如果一个平面等距变换只有一个不动点，则它必是一个旋转变换.

证明 设 O 为等距变换 ϕ 的唯一不动点. 任取另一个点 P, 则 $\phi(P) \neq P$. 设 l 为角 $\angle PO\phi(P)$ 的角平分线. 因为

$$d(O, \phi(P)) = d(\phi(O), \phi(P)) = d(O, P),$$

所以 $l \circ \phi(P) = P$. 于是， O 和 P 均是 $l \circ \phi$ 的不动点. 由命题 1.5, 我们知道，或者 (1) $l \circ \phi = id$ 成立，或者 (2) 存在直线 l', 使得 $l \circ \phi = l'$ 成立. 由 (1) 推出， $\phi = l$, 这与 ϕ 只有一个不动点矛盾. 于是 (2) 必须成立. 故 $\phi = l' \circ l$. 由于 ϕ 只有一个不动点，而平移变换或是没有不动点，或为恒同变换，所以两直线 l 和 l' 必只交于一点，它是 ϕ 的不动点，即为 O 点. 于是， ϕ 为旋转变换. $\square$

定理 1.1 任何一个平面等距变换可以表成至多三个的直线反射的复合.

证明 设 ϕ 是一个等距变换. 如果 $\phi = id$, 则 $\phi = l \circ l$, 命题成立. 如果 ϕ 不是恒同变换，则存在 P 使得 $\phi(P) \neq P$. 令 l 为线段 $\overline{P\phi(P)}$ 的垂直平分线，则有 $l \circ \phi(P) = P$. 于是 $l \circ \phi$ 至少有一个不动点. 如果 $l \circ \phi$ 只有一个不动点，则由命题 1.6 知它是一个旋转变换，故 $l \circ \phi = l_2 \circ l_1$, 故 $\phi = l \circ l_2 \circ l_1$. 如果 $l \circ \phi$ 至少有两个不动点，则由命题 1.5 推出，或者 $l \circ \phi = id$, 即 $\phi = l$; 或者 $l \circ \phi = l'$, 即 $\phi = l \circ l'$. $\square$

由于奇数个直线反射的复合变换一定是反定向的，定理 1.1 推出

定理 1.2 平面上保定向等距变换一定是平移变换或旋转变换.

我们注意到，如果我们将两平行直线 l_1 和 l_2 同时进行一个平移，得到与它们平行的直线 l_3 和 l_4 ，则 $l_2 \circ l_1$ 和 $l_4 \circ l_3$ 是平面上的同一个平移变换。同样，如果我们将两条相交于 O 点的直线 l_1 和 l_2 同时进行一个绕 O 点的旋转，得到直线 l_3 和 l_4 ，则 $l_2 \circ l_1$ 和 $l_4 \circ l_3$ 是平面上的同一个绕 O 点的旋转变换.

定理 1.3（三反射定理）设三直线 l_1, l_2 和 l_3 两两平行或相交于同一点，则存在直线 l 使得 $l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l$.

证明 将直线 l_1 和 l_2 平移或旋转，使得 l_2 与直线 l_3 重合. 这时 l_1 成为直线 l. 由于 $l_2 \circ l_1 = l_3 \circ l$, 故 $l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l$. $\square$

定义 1.6 设直线 l 垂直于两平行线 l_1 和 l_2. 则 $l_2 \circ l_1$ 是沿直线 l 方向的一个平移，且等距变换 $\phi = l \circ (l_2 \circ l_1)$ 是先沿直线 l 作一个平移，然后再对直线 l 作反射. 显然，有 $l \circ (l_2 \circ l_1) = (l_2 \circ l_1) \circ l$. 我们称 $\phi = l \circ (l_2 \circ l_1)$ 为沿直线 l 的一个滑动反射.

定理 1.4 平面上的所有等距变换是由直线反射，平移，旋转和沿某个直线的滑动反射构成的.

证明 设平面等距变换 ϕ 不是直线反射，也不是平移或旋转. 由定理 1.2 知 ϕ 一定可以写成 $\phi = l_3 \circ l_2 \circ l_1$，并且由定理 1.3 知，$l_1, l_2$ 和 l_3 不能两两平行，也不能相交于同一点. 不妨设 l_2 与 l_3 相交于一点 O，且 O 不落在 l_1 上.

将 l_2 和 l_3 同时作一个绕 O 的旋转，得到 l_2' 和 l，使得 l_2' 与 l_1 垂直. 则有 $l_3 \circ l_2 = l \circ l_2'$. 设 l_2' 与 l_1 交于 O' 点. 而 l_2' 与 l_1 再绕 O' 进行一个旋转，得到 l_2^* 和 l_1'，使得 l_1' 与 l_3' 也垂直. 则有 $l_2' \circ l_1 = l_2^* \circ l_1'$. 于是得到

$$\phi = l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l \circ l_2' \circ l_1 = l \circ l_2^* \circ l_1'.$$

这时，l_1' 和 l_2^* 垂直于 l. 故 ϕ 是沿直线 l 的一个滑动反射. □

第 2 章 球面几何

空间中的球面是一个对称且优美的几何对象．设 $\mathbb{S}^2$ 是空间中的一个单位球面，它的中心在 O 点．球面 $\mathbb{S}^2$ 上的每一点，均对应它关于中心 O 的对称点 P'．P' 称为 P 的对径点.

我们称球面上的大圆为直线。球面上每条直线 γ 将球面分成相等的两个半球 $\mathbb{S}^2_+$ 和 $\mathbb{S}^2_-$．γ 所在平面的平面反射 $\gamma : \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{S}^2_-$ 给出两个半球的镜像对称，并保持大圆 γ 上的所有点不动.

球面上的任意两条直线 γ_1 和 γ_2 必相交于一对对径点 P 和 P'．而 $\gamma_2 \circ \gamma_1 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ 为空间中以 PP' 为不动轴的旋转，旋转的角度恰为 γ_1 和 γ_2 所在平面夹角的两倍。

设 P, Q 是 $\mathbb{S}^2$ 上两个非对径点，则 P 和 Q 唯一决定一个大圆弧 ℓ，使得 P 和 Q 落在 ℓ 上．这个大圆弧是 O,P,Q 三点所确定的平面与 $\mathbb{S}^2$ 的交．如果我们将大圆弧看成是球面上的“直线”，则球面上的两个非对径点唯一确定球面上的一条“直线”.

定义 2.1 P 到 Q 的距离 $d(P, Q)$ 定义为向量 $\overrightarrow{OP}$ 和向量 $\overrightarrow{OQ}$ 之间夹角的弧度.

命题 2.1 球面 $\mathbb{S}^2$ 上的直线反射是一个反定向的等距变换.

命题 2.2 球面 $\mathbb{S}^2$ 上连接两点的最短线为大圆弧．（证明非初等，略去）

定理 2.1 球面上的等距变换可以表成至多三个直线反射的复合.

球面上任何两条大圆弧一定相交于两个对径点．由三个部分大圆弧构成的三角形称为球面三角形．设 ΔABC 是一个球面三角形．则这三个大圆弧的另外三个交点为 A'，B' 和 C'，它们构成与 ΔABC 全等的球面三角形 $\Delta A'B'C'$．

我们记部分大圆弧 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{CA}$ 的长度分别为 a, b 和 c. 我们用同一个记号 A 表示大圆弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{AC}$ 所在平面之间的夹角的大小，B 为大圆弧 $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{BA}$ 所在平面之间的夹角的大小，记 C 为大圆弧 $\widehat{CA}$ 和 $\widehat{CB}$ 所在平面之间的夹角的大小.

定理 2.2 球面 ΔABC 的面积 $\Delta = A + B + C - \pi$.

证明 过 A 点的两个大圆弧交于两个对径点 A 和 A'. 因为整个单位球面的面积为 4π，所以这两个交角为 A 的大圆弧切下的两个“西瓜瓢”部分的面积为 $(A/\pi)\cdot 4\pi = 4A$. 我们注意到， A 角的两个“西瓜瓢”，B 角的两个“西瓜瓢”和 C 角的两个“西瓜瓢”和在一起，恰好覆盖球面三角形 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 各三次，而覆盖球面上其余的部分一次. 于是，有

$$4A + 4B + 4C = 2\Delta + 2\Delta' + 4\pi.$$

由于 $\Delta A'B'C'$ 和 ΔABC 的面积相等，故 $\Delta = A + B + C - \pi$. □

推论 2.1 球面三角形的内角和大于 π.

定理 2.3 设 ΔABC 为球面三角形，角 A， B 和 C 所对应的三边边长分别为 a, b 和 c. 则有以下

(1) 球面正弦定理： $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$;

(2) 球面余弦定理（ I ）： $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ ；

(3) 球面余弦定理（ II ）：

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B};$$

推论 2.2 若两个球面三角形三角对应相等，则全等.

定理 2.4 球面中到一定点距离为常值的集合为球面上的圆周.

第 3 章 双曲几何

定义 3.1 在平面 $\mathbb{E}^2$ 上给定一个圆 σ，圆心为 O，半径为 r. 则 σ 诱导一个映射 $\sigma : \mathbb{E}^2 \backslash \{O\} \to \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$：

(i) $\{O, P, \sigma(P)\}$ 共线;

(ii) $d(O, \sigma(P)) \cdot d(O, P) = r^2$.

我们记增广平面 $\overline{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$, 并规定 $\sigma(O) = \infty, \sigma(\infty) = O$，则 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$ 为增广平面上的一个一一对应，称为圆 σ 的反演变换.

命题 3.1 设 σ 是平面上一个圆.

(i) 反演变换 σ 满足 $\sigma^2 = id$, 并保持 σ 上的每个点不动;

(ii) 反演变换 σ 将每个过圆心 O 的直线变成它自身;

(iii) 反演变换 σ 将每个过圆心 O 的圆周变成不过圆心 O 的直线;

(iv) 反演变换 σ 将每个不过圆心 O 的直线 l 变成过圆心 O 的圆 σ', 并且 σ' 在 O 点的切线与 l 平行;

(v) 反演变换 σ 将每个与 σ 正交的圆变成它自身;

(vi) 反演变换 σ 将不过圆心 O 的一个圆 σ_1 变成一个圆 σ_2;

(vii) 反演变换 σ 是反定向的变换.

平面上的一条直线 σ 可以看成是半径为无穷大的圆，它过 ∞ 点. 这时我们规定它的反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$ 为关于 σ 的直线反射，并且 $\sigma(\infty) = \infty$. 它是反定向的变换.

于是，增广平面上的圆由平面上的圆和直线组成. 增广平面上的每个圆 σ 均对应反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$.

命题 3.2 反演变换 σ 将圆变成圆，并保持相交圆的交角不变.

定义 3.2 单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 内部的所有点构成的集合 $\mathbb{H}^2$ 称为双曲平面. 与边界 $\mathbb{S}^1$ 正交的圆在 $\mathbb{H}^2$ 内部的点 γ 称为双曲直线.

双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 的每条直线 γ 将双曲平面分割成“相等”的两个部分 $\mathbb{H}^2_+$ 和 $\mathbb{H}^2_-$. 反演变换 $\gamma : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ 称为双曲直线反射.

命题 3.3 过双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 上的两点有唯一一条直线.

设 P 和 Q 是双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 上两点. 设 γ 为连接两点的双曲直线，它的边界点为 L 和 R, 其中 L 与 P 临近， R 与 Q 临近. 我们定义 P 和 Q 的双曲距离

$$d(P,Q) = \ln \frac{|LQ||RP|}{|LP||RQ|},$$

其中 $|PQ|$ 代表 P 到 Q 的欧式距离.

命题 3.4 双曲直线反射 $\gamma : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ 为反定向的等距变换. （证明非初等，略去）

定理 3.1 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 的等距变换可以表成至多三个的双曲直线反射的乘积.

定理 3.2 过双曲直线 γ 外一点 P 存在无穷多条过 P 点的双曲直线.

定理 3.3 设$\triangle$ ABC 为双曲三角形. 则三角形面积为

$$\Delta = \pi - (A + B + C).$$

推论 3.1 双曲三角形的内角和小于 π.

定理 3.4

(i) 双曲正弦定理：

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C};$$

(ii) 双曲余弦定理（ I ）：

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C;$$

(iii) 双曲余弦定理（ II ）：

$$\cosh c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B};$$

其中：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

推论 3.2 若两个双曲三角形三角对应相等，则全等.

定义 3.3 双曲平面中到定点 O 双曲距离为 r 的集合称为双曲圆.

定理 3.5 所有整个含在双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 的欧式圆为双曲圆.